

**CARNEGIE INSTITUTE
OF TECHNOLOGY**



THE LIBRARY

EINLEITUNG
IN DIE THEORIE
DER
ALGEBRAISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
MIT
EINER UNABHÄNGIGEN VARIABLEN

VON

DR. LOTHAR HEFFTER,
A. O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GIESSEN.

MIT 3 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1894.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER
HERRN PROFESSOR DR. L. FUCHS
IN HERZLICHER DANKBARKEIT
ZUGEEIGNET
VOM VERFASSEN.

Vorwort.

Seitdem die Theorie der linearen Differentialgleichungen durch die beiden Abhandlungen von Fuchs im 66^{ten} und 68^{ten} Band des Crelle'schen Journals, denen schon 1865 eine Publication im Jahresbericht der städtischen Gewerbeschule zu Berlin vorausgegangen war, die Grundlage ihrer heutigen Gestalt erhalten hat, ist eine umfangreiche Literatur über diesen Gegenstand erschienen; aber abgesehen von dem Werk von Th. Craig (A treatise on linear differential equations, t. 1. New-York, 1889) und von solchen Büchern, in denen die genannte Theorie nur als spezieller Teil eines grösseren Ganzen erscheint (wie z. B. in Koenigsberger's Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen, Leipzig, 1889), fehlt es bisher noch immer an einer einheitlichen zusammenfassenden Darstellung. Wenn nun auch diesem Mangel durch das in Vorbereitung begriffene „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen“ von L. Schlesinger in Berlin, welches die ganze Fülle des angehäuften Stoffes ordnen und übersichtlich entwickeln will, in umfassender Weise abgeholfen wird, so bleibt daneben doch noch das Bedürfnis nach einer — soweit es die Verhältnisse gestatten — elementar gehaltenen Einführung in die Grundlagen der Theorie bestehen.

Diesem Bedürfnis wünscht das vorliegende Buch zu entsprechen. Es möchte durch einen möglichst bequemen Eingang einen immer grösseren Kreis von Mathematikern zum Eintritt in dieses fruchtbare und wichtige Gebiet der Wissenschaft veranlassen. Es hofft, schon dem Studierenden, der erst die Elemente der Differential- und Integralrechnung, der Functionentheorie und die Hauptsätze der Determinantentheorie beherrscht, jenen Eintritt zu ermöglichen und vielleicht auch dem Dozenten einen Leitfaden für eine einführende Vorlesung zu liefern.

Zur Erreichung dieses Zwecks schien in erster Linie eine *Beschränkung in der Auswahl des Stoffes* geboten. Der Inhalt des Buches umfasst deshalb im wesentlichen nur den Nachweis der Existenz von

Integralen und die Untersuchung von deren Verhalten in der Umgebung der einzelnen Stellen bei linearen homogenen Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten. Im übrigen wurde nur zugelassen, was als Hilfsmittel oder Illustration für diese Hauptaufgabe dienen konnte, oder was sich unmittelbar daran anknüpfen liess. Hierin möge es seine Erklärung finden, wenn z. B. die elegante und an und für sich nicht schwierige Theorie der adjungierten Differentialgleichungen in dem Buche nicht berührt wird. Für das weitergehende Studium darf ja auch der Leser auf die schon erwähnten Bücher von Craig und Schlesinger, vor allem aber auf die einschlägigen Originalabhandlungen verwiesen werden.

Von besonderer Wichtigkeit mit Rücksicht auf das angestrebte Ziel war dem Verfasser die *Anordnung des Stoffes* und die Verbindung seiner einzelnen Teile. Er wünschte einen Weg zu verfolgen, der möglichst naturgemäss erscheint und bei Vermeidung von Wiederholungen, soweit es irgend angeht, stets vom Einfacheren zum Complicierteren und Schwierigeren vorschreitet. Es sei gestattet, diesen Weg schon an dieser Stelle kurz anzugeben.

Da die Coefficienten der der Untersuchung zu Grunde gelegten linearen homogenen Differentialgleichung nach Voraussetzung in der Umgebung jedes Wertes der unabhängigen Variablen die Gestalt von eindeutigen Potenzreihen haben, liegt die Frage nahe, ob sich vielleicht auch ein Integral der Differentialgleichung in Form einer Reihe bestimmen lässt. Sie findet ihre Beantwortung in Kapitel I insoweit, als die Möglichkeit der formalen Herstellung einer derartigen Reihe mittelst einer *Recursionsformel* nachgewiesen wird, falls man sowohl von den Coefficientenreihen, als von der angesetzten Integralreihe annimmt, dass sie sich bei der in's Auge gefassten Stelle bestimmt verhalten, d. h. höchstens in Richtung der wachsenden Exponenten in's Unendliche gehen. In Kapitel II wird darauf die *Berechnung der Reihen-coefficienten* aus der Recursionsformel einer eingehenden Untersuchung unterworfen und in Kapitel III die *Convergenz* der so ermittelten Reihen dargethan, wenn der zu Grunde gelegte Wert der unabhängigen Variablen eine Stelle der Bestimmtheit¹⁾ ist. Da alle im Weierstrass'schen Sinne regulären Stellen der Coefficienten Stellen der

1) Die Einführung dieses Begriffs (s. S. 14) stützt sich auf die Beschaffenheit der *Coefficienten* der Differentialgleichung; der Name ist im Anschluss an Fuchs (Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1886, S. 281) gewählt. Anschliessend an Thomé (s. S. 90, Anm. 2)) nennt man dieselben Stellen *regulär*; doch soll die letztere Bezeichnung hier nur in dem von Weierstrass eingeführten Sinn benutzt werden.

Bestimmtheit für die Differentialgleichung sind, ist hiermit die *Existenz von Integralen* erwiesen.

Das sich nunmehr fühlbar machende Bedürfnis nach einer Übersicht über die Fülle der Integrale führt in Kap. IV zu der Definition eines *Fundamentalsystems von Integralen* und zu der Untersuchung der Eigenschaften eines solchen, woran sich die Zurückführung der Integration von *nicht homogenen linearen Differentialgleichungen* auf diejenige von homogenen anschliesst.

Durch Einführung des Begriffs eines Fundamentalsystems von Integralen gestaltet sich alsdann die Aufgabe der weiteren Untersuchung dahin, ein solches für die Umgebung jedes Wertes der unabhängigen Variablen zu ermitteln. Ihre Lösung für *reguläre Stellen* in Kap. V findet sogleich eine Anwendung auf die Integration der *linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten*. Von den unendlich vielen regulären Fundamentalsystemen gelangt man in Kap. VI zu dem Begriff des *monogenen Gebildes der Integralfunction* und zur Definition der *Gruppe der Differentialgleichung*.

Nunmehr muss sich die Untersuchung den *singulären Stellen* zuwenden, und zwar schliessen sich hinsichtlich der Einfachheit zunächst diejenigen der *Bestimmtheit* an die regulären Stellen an. Es wird so nach in Kapitel VII die *analytische Gestalt der Integrale* bei einer solchen Stelle ermittelt, wobei sich ergibt, dass dieselben im allgemeinen mit Logarithmen behaftet sind, sich bestimmt verhalten und in bestimmter Weise in Gruppen sondern. In Kapitel VIII wird dann die Berechnung der logarithmenbehafteten Integrale nach einer Methode durchgeführt, die sich namentlich durch Benutzung einer erweiterten *Recursionsformel* eng an die Methoden von Kap. I, II, III anschliesst und ausserdem in Kapitel IX direkt zu einer Zerlegung der Integralgruppen in *Untergruppen* führt. Hat sich so gezeigt, dass sich bei einer Stelle der Bestimmtheit sämtliche Integrale bestimmt verhalten, so ist zur Ergänzung dieser Theorie der Beweis der *Umkehrung* dieses Satzes erwünscht, welcher in Kap. X erbracht wird.

Da bei *Stellen der Unbestimmtheit* die bisher benutzten Methoden versagen, muss ein Ersatz geschaffen werden, der sich in der *Fundamentalgleichung* (Kap. XI) darbietet. Mit ihrer Hülfe werden in Kap. XII bezüglich der *analytischen Gestalt der Integrale für die Umgebung einer beliebigen singulären Stelle* diejenigen Resultate wiedergefunden, die sich vorher mittelst der Recursionsformeln für Stellen der Bestimmtheit ergeben haben, -- mit dem Unterschied natürlich, dass sich bei einer Stelle der Unbestimmtheit nicht sämtliche Integrale bestimmt verhalten können. Da es aber möglich ist, dass *bei einer Stelle der*

Unbestimmtheit ein Teil der Integrale sich bestimmt verhält, so erfordert dieser Fall in Kap. XIII eine besondere Behandlung, welche auch Gelegenheit bietet, auf die *Zerlegbarkeit* und *Reduktibilität* von linearen Differentialgleichungen einzugehen.

Endlich muss in Kap. XIV dem Verhalten der Integrale für *unendlich grosse Werte der unabhängigen Variablen* noch eine besondere Betrachtung gewidmet werden, wonach in Kap. XV die Aufstellung und kurze Untersuchung derjenigen *Differentialgleichungen, die im Endlichen und Unendlichen nur Stellen der Bestimmtheit besitzen*, den Abschluss des Ganzen bildet.

Die *Art der Darstellung* des vorstehend skizzierten Inhaltes verfolgt das Ziel, einerseits nach Möglichkeit zu vereinfachen und zusammenzuziehen, andererseits aber auch keine Lücken zu lassen, zu deren Ausfüllung weitergehende Kenntnisse aus anderen Gebieten der Mathematik erforderlich wären. Aus diesem Grunde glaubte sich der Verfasser zu einer gewissen Breite des Ausdrucks berechtigt; er hofft, dadurch dem Anfänger das Verständnis zu erleichtern. Dem gleichen Zweck sollen zahlreiche, den meisten Abschnitten beigefügte, möglichst einfache Beispiele dienen. Ebenso ist der dem Buch mitgegebene Anhang zur Bequemlichkeit des Lesers bestimmt. Er enthält solche Hilfssätze und -Betrachtungen, die nicht der Theorie der linearen Differentialgleichungen selbst angehören und in der Form, wie sie hier gebraucht werden, nicht unmittelbar aus leicht zugänglichen Büchern entnommen werden können. Durch die Fernhaltung dieses Materials aus dem Text des Buches und Verweisung in einen besonderen Anhang sollte vornehmlich einem schon vorgeschrittenen Leser gedient werden, der diese Hilfsbetrachtungen andernfalls zum Teil hätte überschlagen müssen, während sie mit Rücksicht auf den Anfänger wohl nicht ganz fortbleiben durften.

Was nun die *Quellen* anlangt, denen man die in dem vorliegenden Buch dargestellten Grundlagen der Theorie der linearen Differentialgleichungen verdankt, so sind dies im wesentlichen die Abhandlungen von Fuchs, Frobenius, Hamburger, Thomé und anderen, nicht zu vergessen die Bemerkungen Riemann's in dessen Nachlass. Wo immer dem Verfasser bei der Bearbeitung eine von diesen Quellen vorgelegen hat, oder wo ihm auch nur nachträglich die zunächst im Interesse des einheitlichen Charakters des Ganzen möglichst unabhängig durchgeführte Entwicklung mit derjenigen bei anderen Autoren eine Verwandtschaft zu zeigen schien, wurde direkt auf die betreffende Stelle verwiesen. Gleichwohl ist es bei dem Charakter des Buches nicht nur nicht ausgeschlossen, sondern wohl unvermeidlich, dass in

manchen Fällen eine solche Verwandtschaft mit anderen Darstellungen unbemerkt geblieben ist, was von diesem Gesichtspunkt aus angesehen und entschuldigt werden möge. Am nächsten ihrer Art nach stehen der vorliegenden Arbeit vielleicht drei französische Publicationen, die deshalb, obwohl sie auch im Text citiert werden, schon hier genannt werden sollen; es sind dies

Tannery, Propriétés des équations différentielles linéaires à coefficients variables (Annales de l'école normale, 2^{me} série, t. 4., 1875),

Floquet, Sur la théorie des éq. diff. lin. (Ebenda, t. 8 (1879) Supplément),

Fabry, Sur les intégrales des éq. diff. lin. à coefficients rationnels (Thèse, Paris, 1885).

Nicht erforderlich dagegen erscheint es, diejenigen Resultate und Methoden besonders hervorzuheben, die der Verfasser als sein Eigentum betrachten zu dürfen glaubt. Dies ist für den Anfänger ohne Belang; der kundige Leser aber ist selbst in der Lage zu entscheiden, was er in dem Buche als originell gelten lassen will.

Endlich ist es dem Verfasser ein tiefempfundenes Bedürfnis, auch an dieser Stelle seinem lieben Freunde und einstigen Lehrer, Professor Dr. C. Koehler in Heidelberg, den herzlichsten Dank auszusprechen für die wahrhaft uneigennützig und eingehende Art und Weise, in der er ihn bei diesem Unternehmen von Anfang an mit Rat und That unterstützt hat. Auch Herrn Professor Dr. Franz Meyer in Clausthal, dem bereits die Druckbogen vorgelegen haben, ist der Verfasser für das thätige Interesse, das er seiner Arbeit entgegengebracht hat, zu Dank verpflichtet.

So möge das Buch seinen Weg in die Öffentlichkeit antreten und in den Kreisen der Lernenden und Lehrenden seinem Gegenstand Freunde erwerben! Möchte es insbesondere auch den Beifall desjenigen gewinnen, der freundlichst gestattete, ihm dasselbe als Zeichen tiefempfunder Dankbarkeit für die seit langen Jahren und bis in die Gegenwart fortdauernde wissenschaftliche Anregung und Förderung zuzueignen!

Giessen, im Dezember 1893.

Lothar Heffter.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

	Seite
1. Definition der linearen homogenen Differentialgleichung	1
2. Die Coefficienten der Differentialgleichung	2
3. Die singulären Punkte der Differentialgleichung	3
4. Ziel der Untersuchung	5

Kapitel I.

Recursionsformel und determinierende Gleichung.

5. Feststellung der ersten Aufgaben	8
6. Die Recursionsformel	10
7. Die determinierende Gleichung	12
8. Grad der determinierenden Gleichung; Stelle der Bestimmtheit	13
9. Specialisierung für reguläre Stellen	14
10. Beispiele	17

Kapitel II.

Berechnung der Reihencoefficienten aus der Recursionsformel.

11. Präcisierung der Aufgabe	20
12. Einführung von Bezeichnungen	21
13. Ersetzung des Systems S durch ein anderes	24
14. Die Bedingungen dafür, dass zu einer Wurzel der determinierenden Gleichung eine Reihe gehört	27
15. Die willkürlichen Constanten der Reihen	28
16. Zwei extreme Specialfälle	30
17. Anwendung auf reguläre Stellen	32
18. Weitere Beispiele	33

Kapitel III.

Nachweis der Reihenconvergenz bei einer Stelle der Bestimmtheit.

19. Begründung der Beschränkung auf Stellen der Bestimmtheit; vereinfachende Annahmen	35
20. Hilfsdifferentialgleichung und Hilfsreihe	37
21. Convergenz der Hilfsreihe	38
22. Convergenz der vorgelegten Reihe	39
23. Beispiele	41

Kapitel IV.

Fundamentalsystem von Integralen. Nicht homogene
Differentialgleichungen.

	Seite
24. Feststellung der nächsten Aufgaben	45
25. Beziehungen von Integralen untereinander	45
26. Ausdruck der Coefficienten der Differentialgleichung durch n linear un- abhängige Integrale	47
27. Fundamentalsystem von Integralen	48
28. Die Determinante eines Fundamentalsystems	50
29. Erniedrigung der Ordnung der Differentialgleichung bei Kenntniss eines Integrals	52
30. Fuchs'sche Methode zur Gewinnung linear unabhängiger Integrale. . .	53
31. Zurückführung der Integration von nicht homogenen auf die Integration von homogenen linearen Differentialgleichungen	55

Kapitel V.

Die Integrale bei einer regulären Stelle und die linearen
Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten.

32. Übersicht über den Fortgang der Untersuchung	58
33. Verhalten der Integrale bei einer regulären Stelle	58
34. Die scheinbar singulären Punkte	60
35. Die linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten . . .	62
36. Nachweis der linearen Unabhängigkeit der n aufgestellten Integrale der Differentialgleichung mit constanten Coefficienten	65
37. Beispiele	66

Kapitel VI.

Die Integralfunction im ganzen Gebiet der Differential-
gleichung. Gruppe der Differentialgleichung.

38. Feststellung der zu behandelnden Aufgabe	68
39. Analytische Fortsetzung der Integrale	69
40. Das monogene Gebilde der Integralfunction	71
41. Gebiet der Eindeutigkeit der Integralfunction	72
42. Zweige der Integralfunction	75
43. Zusammenhang zwischen zwei unabhängig von einander definierten Fun- damentalsystemen	76
44. Fundamentalsubstitutionen und Gruppe der Differentialgleichung . . .	79
45. Beispiele	82

Kapitel VII.

Analytische Gestalt der Integrale bei einer singulären
Stelle der Bestimmtheit.

46. Anwendung der Fuchs'schen Methode	84
47. Aufstellung von Integralgruppen	86
48. Analytische Gestalt der Gruppen-Integrale	89
49. Zugehörigkeit der Integrale zu den Wurzeln der determinierenden Gleichung	91

	Seite
50. Folgerungen	93
51. Verzweigung der Integrale bei $x = 0$; Umlaufsrelationen	94
52. Lineare Abhängigkeit zwischen den Functionen $\psi_{\alpha\beta}$	97
53. Grad der Gruppen-Integrale im Logarithmus	98
54. Differentialgleichungen mit einer einzigen singulären Stelle (der Bestimmtheit) im Endlichen	100

Kapitel VIII.

Recursionsformeln der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen bei einer Stelle der Bestimmtheit.

55. Aufstellung der zu behandelnden Aufgaben	104
56. Allgemeiner Satz über die Herleitung mehrerer logarithmenbehafteter Integrale aus einem solchen	105
57. Substitution des logarithmenbehafteten Integrals in die Differentialgleichung	109
58. Convergenz der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen	111
59. Recursionsformeln der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen	113
60. Zugehörigkeit logarithmenbehafteter Integrale zu den Wurzeln der determinierenden Gleichung	116
61. Berechnung der Reihencoefficienten aus der Recursionsformel	118
62. Das allgemeinste Integral einer Gruppe	123
63. Folgerung aus der Recursionsformel	127
64. Beispiel	131

Kapitel IX.

Zerlegung der Integralgruppen in Untergruppen.

65. Fundamentalsystem von lauter einfachsten Integralen	133
66. Integraluntergruppen. Untergruppen höchster Stufe	134
67. Aufstellung der übrigen Untergruppen	136
68. Modifizierte Aufstellung der Untergruppen	139
69. Specialfälle und Beispiele	140

Kapitel X.

Notwendigkeit der Bestimmtheitsgestalt der Differentialgleichung bei einer Stelle für bestimmtes Verhalten sämtlicher Integrale daselbst.

70. Aufgabe und Gang der Lösung	142
71. Umwandlung des vorgelegten Fundamentalsystems	143
72. Beweis, dass $x = 0$ höchstens ausserwesentlich singuläre Stelle ist.	145
73. Nachweis, dass $x = 0$ Stelle der Bestimmtheit ist	147

Kapitel XI.

Fundamentalgleichung.

74. Aufgabe der folgenden Untersuchung	149
75. Aufstellung der Fundamentalgleichung	150
76. Invarianz der Linearteiler der Fundamentalgleichung	152

	Seite
77. Invarianz der Elementarteiler der Fundamentalgleichung	154
78. Grad der Unbestimmtheit des Gleichungssystems (7)	156
79. Fundamentalgleichung für eine Stelle der Bestimmtheit und ihre Beziehung zur determinierenden Gleichung	157
80. Beziehung zwischen den Integraluntergruppen bei einer Stelle der Bestimmtheit und den Elementarteilern der Fundamentalgleichung	159

Kapitel XII.

Die Integrale in einem Kreisring.

81. Die Integrale bei Verschiedenheit sämtlicher Wurzeln der Fundamentalgleichung	162
82. Verfahren bei mehrfachen Wurzeln der Fundamentalgleichung	165
83. Integralgruppen entsprechend den mehrfachen Linearteilern der Fundamentalgleichung	167
84. Sämtliche Integrale erster Stufe in einer Gruppe	169
85. Sämtliche Integrale einer Gruppe nach ihrer Stufenzahl geordnet	172
86. Integraluntergruppen entsprechend den Elementarteilern der Fundamentalgleichung	176

Kapitel XIII.

Stellen der Unbestimmtheit, bei denen sich ein Teil der Integrale bestimmt verhält. Reduktibilität.

87. Aufstellung der zu behandelnden Aufgaben	179
88. Differentialgleichung niedrigerer Ordnung für die sich bestimmt verhaltenden Integrale	180
89. Zerlegung eines Differentialausdrucks	181
90. Zerlegbarkeit einer Differentialgleichung mit bei $x = 0$ zum Teil sich bestimmt verhaltenden Integralen	184
91. Spezialisierung für ausserwesentlich singuläre Stellen. Zerlegbarkeit der Recursionsformel	185
92. Zerlegung eines Differentialausdrucks in Differentialausdrücke erster Ordnung	188
93. Reduktibilität linearer Differentialgleichungen	191
94. Nachweis der Existenz irreduktibler Differentialgleichungen	193
95. Beispiele	194

Kapitel XIV.

Die Integrale in der Umgebung unendlich grosser Werte der unabhängigen Variablen.

96. Transformation mittelst reziproker Radien	198
97. Die transformierte Differentialgleichung	199
98. Allgemeine Gestalt der Integrale in der Umgebung von $x = \infty$	201
99. Mannigfaltigkeit des zu $x = \infty$ gehörigen Fundamentalsystems; Invarianz seiner Einteilung in Untergruppen	202
100. Kriterien für die Natur der Stelle $x = \infty$	203
101. Recursionsformel bei $x = \infty$	206

	Seite
102. Die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Gleichung	207
103. Beispiele	209

Kapitel XV.

Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse.

104. Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten	212
105. Gemeinschaftliche Recursionsformel derselben bei $x = 0$ und $x = \infty$	213
106. Gemeinschaftlicher Algorithmus der Integrale von Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten bei $x = 0$ und $x = \infty$	215
107. Anwendung auf die Gauss'sche Differentialgleichung.	217
108. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse	219
109. Beziehung zwischen den Wurzeln der determinierenden Gleichungen aller singulären Punkte	220
110. Differentialgleichungen mit nur algebraischen Integralen	222
111. Transformation der Differentialgleichungen II. Ordnung der Fuchs'schen Klasse	224
112. Die Gauss'sche Differentialgleichung.	226
113. Die Integrale der Gauss'schen Differentialgleichung.	227

Anhang.

Hilfssätze.

Zu Kap. IV. Sechs Sätze über lineare Abhängigkeit von Functionen . . .	233
„ „ V. Über das Verschwinden einer Determinante	240
„ „ VII. Über die Integration einer sich bestimmt verhaltenden Function	241
„ „ X. Begründung einer S. 146 benutzten Identität	245
„ „ XI. Beweis der S. 155 benutzten Determinantenformel	246
„ „ XII. 1) Begründung einer S. 166 benutzten Identität.	248
2) Satz von Casorati	250
Register der angewandten Bezeichnungen	257

Berichtigungen.

- S. 1. Z. 3 v. u. ist das Komma zu streichen.
- „ 4. „ 1 v. o. ist der Hinweis auf Anm. 1) zu streichen und Z. 4 hinter „*Differentialgleichung*“ anzufügen.
- „ 9. „ 11 v. o. lies „Integrale“ statt „Integralen“.
- „ 10. „ 10 v. u. lies „wann“ statt „wenn“.
- „ 14. „ 9 v. o. lies „*bestehen*“ statt „*besteht*“.
- „ 17. „ 9 v. u. sind die Worte „für $q = n$ wird $x = 0$ reguläre Stelle“ als überflüssig zu streichen.
- „ 22. „ 16 v. o. lies „Null“ statt „Null“.
- „ 33. „ 14 v. u. ist das Wort „eine“ zu streichen.
- „ 35. „ 2 v. u. lies „vom“ statt „von“.
- „ 36. in Formel (2) lies $u^{(n)} \cdot x^n$ statt $u^{(n)} \cdot x^n$.
- „ 38. Z. 5 v. o. lies γ_1 statt γ .
- „ 45. „ 12 v. u. lies „Frage“ statt „Frage“.
- „ 46. „ 6 v. u. lies „Es existiert nun“.
- „ 56. „ 21 v. o. lies in der Formel O statt O' .
- „ 60. „ 12 v. o. ist das Wort „sogenannten“ zu streichen.
- „ 62. „ 18 v. o. lies „*Zahlen*“ statt „*Zahlen*“.
- „ 69. „ 16 v. o. lies „in“ statt „n“.
- „ 91 letzte Zeile ist hinzuzufügen: „*Ist q eine negative ganze Zahl, so gilt der Satz für einen beliebigen Wert der Integrationsconstanten; andernfalls muss dieselbe gleich Null gesetzt werden.*“
- „ 124. Z. 8 v. u. statt „Integralen der einzelnen Stufen“ lies „Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\log x$ “.
- „ 145 „ 4 v. o. lies „wie“ statt „die“.
- „ 146. „ 12 v. o. ist hinter „gleich“ ein Komma zu setzen.
- „ 176. in Formel (37) Zeile 3 lies y_{2r} statt y_{2r+1} .
- „ 222. Anm. 2) lies „S. 154“ statt „S.“
- „ 228. Z. 3 v. u. lies $C_{a+1, r-2}(\alpha)$ statt $C_{a+r-2}(\alpha)$

Einleitung.

1. Definition der linearen homogenen Differentialgleichung. Bedeutet x eine unabhängig veränderliche Grösse, y eine unbekannte Function derselben und sind y', y'', \dots die Zeichen für die successiven Ableitungen von y nach x , so nennt man jede Gleichung

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0,$$

in deren linke Seite von jenen Zeichen x und y selbst nicht notwendig, dagegen mindestens eines der y', y'', \dots wirklich eintritt, eine *Differentialgleichung* und zwar eine *gewöhnliche Differentialgleichung*, weil nur gewöhnliche Differentialquotienten darin vorkommen. x heisst die *unabhängige*, y die (vermittelt der Differentialgleichung von jener) *abhängige Variable*. Enthält die Gleichung ausser x noch andere veränderliche Grössen, von denen y mithin auch abhängen wird, ohne dass jedoch nach diesen Veränderlichen genommene Ableitungen von y in der Gleichung vorkommen, so nennt man dieselben *Parameter der Differentialgleichung*.

Ist $y^{(n)}$ die Ableitung *höchster* Ordnung, welche in F vorkommt, so sagt man, die Differentialgleichung sei *von der n^{ten} Ordnung*. Ist $F = 0$ eine *algebraische Differentialgleichung*, d. h. lässt sich die linke Seite in die Gestalt einer ganzen rationalen Function von $y, y', \dots, y^{(n)}$ bringen, so spricht man noch von dem *Grad der Differentialgleichung* und versteht darunter den Grad jener ganzen Function in den genannten Grössen.

Unter den gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung sind nun die einfachsten diejenigen vom *ersten Grade* oder die *gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen*, d. h. Differentialgleichungen von der Form

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y + p(x) = 0,$$

worin p_0, p_1, \dots, p_n und p irgend welche gegebene Functionen von x sind, und die *Coefficienten der Differentialgleichung* heissen. Fehlt insbesondere der von y und seinen Ableitungen freie Teil $p(x)$, so nennt man die lineare Differentialgleichung *homogen*. Da nun, wie sich

später zeigen wird, die Untersuchung der *nicht* homogenen stets auf diejenige von homogenen linearen Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann, so brauchen nur die letzteren den Gegenstand unseres Studiums zu bilden, also die Gleichungen der Form

$$(1) \quad p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = 0.$$

2. Die Coefficienten der Differentialgleichung. Der individuelle Charakter einer linearen homogenen Differentialgleichung wird also, abgesehen von der Ordnungszahl n , nur durch die Natur der Coefficienten $p_0, p_1 \dots p_n$ bestimmt. Es ist deshalb erforderlich, um den Gegenstand unserer Untersuchung genau zu bezeichnen, zuvor noch die Voraussetzungen anzugeben, welche bezüglich der Coefficienten $p_0, p_1 \dots p_n$ gelten sollen. Für die unabhängige Variable x , welche an sich in ihrem Wertbereich völlig unbeschränkt sein soll, also alle reellen und complexen Werte annehmen kann, bedienen wir uns dabei unter Benützung der geometrischen Darstellung complexer Grössen in einer Ebene der geometrischen Ausdrucksweise, sprechen also von der x -Ebene, von Punkten, Curven, Flächenstücken in dieser u. s. w.

Jede der Functionen $p_0, p_1 \dots p_n$ ist nun durch die Art, wie sie gegeben ist, entweder für die ganze x -Ebene oder nur für einen bestimmten Teil derselben definiert. Auch in dem Falle aber, dass nicht alle Coefficienten $p_0, p_1 \dots p_n$ für die ganze x -Ebene definiert sind, können wir annehmen, dass es *ein und nur ein zusammenhängendes Gebiet* G in der x -Ebene giebt, für welches alle $n + 1$ Coefficienten gleichzeitig definiert sind. Gäbe es nämlich gar kein solches Gebiet, so wäre dies gleichbedeutend damit, dass überhaupt keine Differentialgleichung vorgelegt wäre. Giebt es aber mehrere, von einander getrennte Gebiete der gedachten Art, G_1, G_2, \dots , so wird sich später (Kap. VI) zeigen, dass dann für jedes derselben eine besondere Untersuchung angestellt werden muss, dass es sich dann also gerade so verhält, als ob *eine* Differentialgleichung vorgelegt wäre, deren Coefficienten für G_1 , eine *andere*, deren Coefficienten für G_2 definiert sind, u. s. w. Wir wollen den zusammenhängenden Bereich, für den sämtliche Coefficienten p gleichzeitig definiert sind, das *Gebiet der Differentialgleichung* nennen. Dieses umfasst also entweder die ganze x -Ebene oder einen solchen Theil derselben, in welchem man von jedem beliebigen Punkt nach jedem beliebigen andern Punkt gelangen kann, ohne die Begrenzung zu überschreiten. Die *unendlich grossen* Werte von x können zum Gebiet der Differentialgleichung gehören oder davon ausgeschlossen sein. Uebrigens kann man dieselben durch Ausführung der Transformation

$$x = \frac{1}{x'}$$

für die unabhängige Variable in endliche Werte des Gebietes der transformierten, abermals linearen homogenen Differentialgleichung verwandeln, worauf wir später eingehend zurückkommen werden.

Da es sich nun hier bloß um eine Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen handelt, wollen wir die beschränkende Annahme machen, dass die Coefficienten p_0, p_1, \dots, p_n in dem ganzen Gebiet der Differentialgleichung eindeutige, endliche und stetige analytische Functionen sind oder nach Befreiung von einem ihnen allen anhaftenden und darum unwesentlichen gemeinsamen Factor, den wir jetzt immer schon entfernt denken wollen, diese Eigenschaften erhalten. Die Functionen p_0, p_1, \dots, p_n sollen sich also nach der Weierstrass'schen Ausdrucksweise in dem ganzen Gebiet der Differentialgleichung *regulär verhalten* und sind nach dem Cauchy'schen Fundamentalsatz¹⁾ in der Umgebung eines jeden Punktes $x = a$ im Innern des Gebietes als gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$ (die nur positive ganze Potenzen von $x - a$ enthalten) darstellbar.

3. Die singulären Punkte der Differentialgleichung. Dividirt man die ganze Differentialgleichung (1) durch den Coefficienten von $y^{(n)}$

$$(2) \quad y^{(n)} + \frac{p_1}{p_0} y^{(n-1)} + \dots + \frac{p_n}{p_0} y = 0,$$

so sind auch die Coefficienten der so transformierten Differentialgleichung (2) regulär in der Umgebung aller Punkte im Innern des Gebietes der Differentialgleichung mit Ausnahme derjenigen, wo $p_0(x)$ verschwindet, weil dort mindestens einer der Coefficienten von (2) unendlich wird. Die ersteren wollen wir deshalb *reguläre*, die letzteren *singuläre Stellen der Differentialgleichung* nennen. Nach der für die Functionen p_0, p_1, \dots, p_n geltenden Voraussetzung kann man aber auch in der Umgebung einer solchen singulären Stelle $x = a$ jeden der Quotienten

$$\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \dots, \frac{p_n}{p_0}$$

nach dem Cauchy'schen Satz wieder als Potenzreihe von $x - a$ darstellen, die nur ganze Potenzen und höchstens eine *endliche* Anzahl negativer Potenzen enthält. $x = a$ ist also für diejenigen dieser Quotienten, die dort unendlich werden, nach der Weierstrass'schen Be-

1) Vgl. z. B. Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques. II. Éd. Paris 1875. p. 149.

zeichnung nur eine *ausserwesentlich singuläre Stelle*¹⁾. Deshalb sollen diejenigen Stellen, welche im Gebiet der Differentialgleichung liegen, für die aber $p_0(x)$ verschwindet, *ausserwesentlich singuläre Stellen der Differentialgleichung* und im Gegensatz hierzu alle Punkte der x -Ebene, welche dem Gebiet der Differentialgleichung nicht angehören, *wesentlich singuläre Stellen der Differentialgleichung*¹⁾ heissen.

Nunmehr wollen wir jedem endlichen Punkte der x -Ebene in Bezug auf die Differentialgleichung eine gewisse *Umgebung* zuordnen. Bei einer regulären und ausserwesentlich singulären Stelle $x = a$ sei dies das Innere des *Kreises* mit dem Mittelpunkt a , der durch den diesem Punkt am nächsten liegenden singulären Punkt der Differentialgleichung hindurchgeht. Die Umgebung einer wesentlich singulären Stelle $x = a$ dagegen sei das Innere eines *Kreisringes* mit dem Mittelpunkte a und so beschaffen, dass er vom Mittelpunkt a aus gerechnet der erste Kreisring von endlicher Radiendifferenz ist, der keinen singulären Punkt enthält, der also ganz dem Gebiet der Differentialgleichung angehört. Gibt es in unendlicher Nähe von $x = a$ keinen

andern singulären Punkt, wie z. B. bei der Function $e^{\frac{1}{x}}$ in der Nähe von $x = 0$, so kann der Radius des inneren Begrenzungskreises jenes Ringes beliebig klein genommen werden, während derjenige des äusseren Begrenzungskreises wie bei einer regulären oder ausserwesentlich singulären Stelle bestimmt ist.

Es liegt auf der Hand, dass es wesentlich singuläre Stellen geben kann, für die eine Umgebung von endlicher Ausdehnung *nicht* existiert. Besitzt aber die wesentlich singuläre Stelle $x = a$ eine (endliche) Umgebung, so kann man innerhalb derselben nach dem Laurent'schen Satz²⁾ jeden der Quotienten

$$\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \dots, \frac{p_n}{p_0}$$

in eine Potenzreihe von $x - a$ entwickeln, welche aber *unendlich viele negative Potenzen* enthält. Hiermit rechtfertigt sich nachträglich — abermals durch die Uebereinstimmung mit der Weierstrass'schen Namensgebung — die Bezeichnung der nicht zum Gebiet der Differentialgleichung gehörenden Punkte als *wesentlich singuläre Stellen der Differentialgleichung*.

1) Dieselben Namen haben bei Fuchs eine andere Bedeutung. Vgl. Crelles Journ. Bd. 68. (1868). S. 378 und Artikel 34.

2) Vgl. Briot et Bouquet, Th. d. f. ell. p. 158.

Fassen wir die vorangehende Erörterung kurz zusammen, so lautet ihr Inhalt:

Wir unterscheiden reguläre, ausserwesentlich singuläre und wesentlich singuläre Stellen der Differentialgleichung (1) oder (2). Die Gesamtheit der beiden ersteren zusammen bildet das Gebiet der Differentialgleichung. Die ausserwesentlich singulären Punkte sind die Nullstellen von $p_0(x)$. Jedem Punkt der x -Ebene ist eine Umgebung zugeordnet, welche bei den Stellen der beiden ersten Arten ein Kreis ist, bei der dritten Art ein Kreisring, dessen Flächeninhalt auch Null sein kann. Die Coefficienten der Differentialgleichung in der Gestalt (2) sind, sobald eine Umgebung von $x = a$ existiert, nach ganzen Potenzen von $x - a$ entwickelbar. Ist $x = a$ regulär, so enthalten alle diese Reihen nur positive Potenzen; ist $x = a$ ausserwesentlich singulär, so kommen auch negative Potenzen vor, jedoch nur in endlicher Anzahl; ist $x = a$ wesentlich singulär, so enthält mindestens eine der Reihen unendlich viel negative Potenzen.

4. Ziel der Untersuchung. Nachdem im Vorstehenden der Gegenstand unserer Untersuchung genau festgelegt worden ist, tritt nun die Frage an uns heran, was als *Ziel* derselben zu bezeichnen ist.

Eine Differentialgleichung legt uns, gerade wie eine algebraische Gleichung, das Problem vor, die in der Gleichung enthaltene *unbekannte Grösse* zu ergründen. In unserm Fall handelt es sich also um eine Grösse y , welche so als Function von x zu bestimmen ist, dass sie die Differentialgleichung *erfüllt* oder *befriedigt* und zwar *identisch*, d. h. wenn sie in die Gleichung eingesetzt ist, soll deren linke Seite, die ja dann formal nur noch von der Variablen x abhängt, thatsächlich auch von dieser unabhängig und gleich Null sein. Eine Function y von x mit dieser Eigenschaft nennt man ein *Integral der Differentialgleichung*, ihre Ermittlung die *Integration der Differentialgleichung*. Diese Bezeichnungen haben ihren Ursprung darin, dass das Problem einer Differentialgleichung eine Verallgemeinerung des Problems der Integralrechnung oder besser umgekehrt dieses nur ein sehr specieller Fall von jenem ist.

Der Inhalt dessen, was man unter *Integration einer Differentialgleichung* versteht, hat aber im Laufe der Zeit eine erhebliche Wandlung erfahren. Wie man bei den algebraischen Gleichungen zunächst nach *Auflösung*, d. h. nach einem Ausdruck der Wurzeln durch die Coefficienten mittelst bekannter Functionszeichen trachtete, hierbei bald auf Schwierigkeiten stiess, zweifelhaft wurde, die Existenz der Wurzeln erst beweisen musste (Gauss), aber nicht viel später auch die Unmöglichkeit, dieselben allgemein durch bekannte Functions-

zeichen zu erhalten, entdeckte (Abel) — ganz ähnlich hier! Man suchte zunächst unter den bis dahin bekannten Functionen nach solchen, welche die Differentialgleichung erfüllten. War dies unmöglich, so trachtete man, die Lösung auf *Quadraturen* zurückzuführen, d. h. auf Differentialgleichungen ersten Grades und erster Ordnung von der Gestalt $\frac{dy}{dx} = f(x)$, — eine rein formale Verschiebung der Schwierigkeit. Da es aber nicht an Fällen mangelte, wo weder das Eine noch das Andere gelang, warf sich auch hier von selbst die Frage auf: „*Gibt es denn überhaupt immer ein Integral?*“, eine Frage, die von Cauchy¹⁾ in wesentlich bejahendem Sinn beantwortet wurde. Und als Gegenstück zum Abel'schen Satz in der Algebra könnte man hier einen Beweis von Liouville²⁾ gelten lassen, wonach das elliptische Integral erster Gattung nicht durch die bekannten Functionen ausdrückbar, mit andern Worten also die entsprechende Differentialgleichung erster Ordnung im alten Sinn des Wortes nicht integrierbar ist.

So wurde die Stellung zum Differentialgleichungs-Problem eine wesentlich neue. Wie man in der Algebra heute nur noch fragt: „welches sind die Eigenschaften der durch eine bestimmte algebraische Gleichung definierten algebraischen Zahl?“, so hier: „*Welches sind die Eigenschaften der Function, die durch eine bestimmte Differentialgleichung definiert wird?*“ Während früher vorzugsweise die Differentialgleichungen interessierten, die man im damaligen Sinne integrieren konnte, ist es jetzt gerade umgekehrt. Wo wir bekannte explicite Functionsausdrücke *haben*, ziehen wir diese natürlich vor und werfen die Differentialgleichung als unnütz gewordene Schale bei Seite; wo das aber nicht der Fall, da ist uns die Differentialgleichung selbst das einzige Mittel zur Bestimmung der ihr genügenden Function.

Wenden wir diese allgemeine Betrachtung auf den vorliegenden Fall an, so ist die Aufgabe, welche uns eine lineare homogene Differentialgleichung stellt, hiernach *die functionentheoretische Untersuchung des Integrals, bezw. der Integrale auf Grund der Daten der Differentialgleichung.*

Diese Untersuchung ist zu eröffnen mit dem *Nachweis der Existenz von Integralen*. Ist derselbe geführt, so sind Methoden zu entwickeln, welche sowohl — wenn dies möglich ist — die *Berechnung der Integralwerte für die Werte von x im Gebiet der Differentialgleichung* gestatten, als auch Aufschluss geben über das *analytische Verhalten der Integrale in der Umgebung aller regulären und singulären Punkte*. Hierbei

1) Vgl. z. B. Briot et Bouquet, Th. d. f. ell. p. 325 u. ff.

2) Journ. de l'École Polytechnique, Cah. 23. (1834.) p. 37 ff.

wird sich sehr bald schon eine *weitere Unterscheidung unter den singulären Punkten* als nötig erweisen: wir werden nämlich finden, dass in gewisser Hinsicht *die regulären Stellen mit den ausserwesentlich singulären von bestimmter Art einerseits den übrigen ausserwesentlich singulären und den wesentlich singulären Stellen andererseits* gegenüberstehen, sodass sich auch die Untersuchung entsprechend diesen beiden Arten von Punkten gabelt. Den Schluss soll eine kurze Betrachtung *derjenigen Differentialgleichungen bilden, welche nur Stellen der ersten Art besitzen.*

Kapitel I.

Recursionsformel und determinierende Gleichung.

5. Feststellung der ersten Aufgaben. Nach den einleitenden Erörterungen ist die erste Aufgabe der *Nachweis der Existenz von Integralen* der vorgelegten Differentialgleichung

$$(1) \quad P(x, y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0.$$

Darauf zielen deshalb auch unsere nächsten Schritte hin.

Sei $x = 0$ eine *ganz beliebige Stelle*, regulär oder singulär, jedoch *mit einer endlichen Umgebung*. Was dann hier und im Folgenden zur Vereinfachung der Formeln von $x = 0$ gesagt wird, gilt natürlich für jede beliebige Stelle $x = a$ von derselben Beschaffenheit; man kann ja durch die einfache Transformation

$$x = a + x'$$

diesen Fall auf jenen zurückführen.

Da nun in der Umgebung von $x = 0$ die Coefficienten p_0, p_1, \dots, p_n der Differentialgleichung nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihen sind, liegt es nahe, auch die Integrale, d. h. die Functionen, welche für y in (1) substituiert, diese erfüllen, in der *Gestalt von Reihen* zu suchen, die nach Potenzen von x fortschreiten.

Hierbei zeigt zunächst eine einfache Ueberlegung, dass man nur solche Reihen in's Auge zu fassen braucht, deren sämtliche Exponenten (der Potenzen von x) sich untereinander nur um *ganze* Zahlen unterscheiden. Genügt nämlich der Differentialgleichung (1) eine Reihe η , bei der diese Eigenschaft nicht besteht, so kann man η zerlegen in eine Summe mehrerer Reihen

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \dots,$$

sodass etwa η_1 nur Potenzen enthält, deren Exponenten von α_1 , η_2 nur solche, deren Exponenten von α_2 , u. s. w. nur um ganze Zahlen verschieden sind, während keine der Differenzen zwischen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ganzzahlig oder Null ist. Da nun

$$P(x, \eta) = P(x, \eta_1) + P(x, \eta_2) + \dots,$$

ist für das identische Verschwinden von $P(x, \eta)$ erforderlich, dass einzeln

$$P(x, \eta_1) \equiv 0, \quad P(x, \eta_2) \equiv 0, \dots;$$

dem, da die Coefficienten $p_0, p_1 \dots p_n$ nur ganze Potenzen enthalten, treten in jedem der letzteren Ausdrücke nur solche Potenzen von x auf, die in keinem der übrigen vorkommen. Damit also die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x Null sind, wie es das identische Verschwinden von $P(x, \eta)$ erfordert, müssen jene Ausdrücke einzeln identisch verschwinden, d. h. η_1, η_2, \dots müssen selbst Integrale sein. Ein Integral η , bei dem unsere oben ausgesprochene Behauptung nicht erfüllt ist, lässt sich also stets als Summe mehrerer Integralen darstellen, bei deren jedem sie erfüllt ist.

Die Reihen, durch welche wir versuchen wollen, der Differentialgleichung (1) zu genügen, sind daher in der Form

$$(2) \quad \eta \equiv x^\alpha \sum_{(k)} c_k x^k$$

anzusetzen, wobei α eine ganz beliebige, reelle oder complexe Zahl ist und k nur *ganzzahlige* Werte durchläuft. Es ist natürlich keineswegs ausgeschlossen, dass k dabei auch negative ganzzahlige Werte, ja sogar unendlich viele solche durchlaufen kann. Allein, wenn man nun (2) in die Differentialgleichung (1) substituiert und dann die Coefficienten c_k der Reihe (2) und α so zu bestimmen sucht, dass alle Coefficienten von x in dem Ergebnis jener Substitution verschwinden (*Methode der unbestimmten Coefficienten*), so zeigt sich bald, dass die Ausführung dieser Aufgabe — wenigstens mit elementaren Hilfsmitteln — unmöglich ist, sowohl wenn k in (2) auch unendlich viele negative Werte annimmt, als auch, wenn einer der Coefficienten $p_0, p_1 \dots p_n$ unendlich viele negative Potenzen enthält.

Es ist daher eine *notwendige Beschränkung*, wenn wir nuncmehr annehmen, $x = 0$ sei nicht wesentlich singuläre Stelle oder $x = 0$ gehöre dem Gebiet der Differentialgleichung an, sodass in der Umgebung von $x = 0$ (1) so geschrieben werden kann, dass die Coefficienten keine negativen Potenzen von x enthalten. Wir setzen die Gleichung — wie bald ersichtlich sein wird, zur Vereinfachung der folgenden Formeln — insbesondere in die Gestalt

$$(3) \quad P(x, y) = x^a \cdot \mathfrak{P}_0 y^{(a)} + x^{a-1} \mathfrak{P}_1 y^{(a-1)} + \dots + x \mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

wo $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von x sind und für $x = 0$ nicht sämtlich verschwinden. Die in dieser Weise eindeutig bestimmte

Gestalt (3) der Differentialgleichung wollen wir deren *Normalform bei* $x = 0^1)$ nennen.

Es ist ferner geboten, — weil, wie schon ausgesprochen wurde, im entgegengesetzten Fall der Erfolg ausgeschlossen ist — nur nach solchen Reihen

$$(4) \quad \eta \equiv \sum_{(k)} c_k x^k \quad (k = \alpha, \alpha + 1, \dots)$$

zu fragen, wo der absolute Betrag von α — den wir nach Weierstrass mit $|\alpha|$ bezeichnen — eine *endliche* Grösse ist. Wir wollen von einer solchen Reihe (4), deren Anfangscoefficient $c_\alpha \neq 0$ ist, so dass die Reihe thatsächlich genau mit x^α , nicht erst mit einer höheren Potenz beginnt, sagen, „*sie gehöre zu der Zahl oder zu dem Exponenten α* “ oder kurz „*zu α* “. Gleichzeitig wollen wir sagen „*die Reihe η verhält sich bei $x = 0$ bestimmt*“, weil sie mit der bestimmten endlichen Potenz $x^{-\alpha}$ multipliciert für $x = 0$ einen *bestimmten, endlichen, von Null verschiedenen Wert* annimmt.

Unsere *erste Hauptaufgabe* ist daher *die Aufsuchung aller Integrale in Reihenform, welche sich bei der beliebigen, dem Gebiet der Differentialgleichung angehörigen Stelle $x = 0$ bestimmt verhalten*.

Diese Aufgabe wird in den drei ersten Kapiteln behandelt. In dem gegenwärtigen ersten Kapitel werden die Gleichungen aufgestellt, denen die *Coefficienten* c_k der Reihe (4) zu genügen haben, wobei sich auch eine Gleichung ergibt, deren Wurzel der *Anfangsexponent* α sein muss. Im zweiten Kapitel wird ermittelt, *welche* Wurzeln jener Gleichung thatsächlich Anfangsexponenten von einer Reihe (4) sein können. Im dritten Kapitel endlich wird gezeigt, wenn die aufgestellten Reihen *convergieren*, also *Integrale* darstellen.

6. Die Recursionsformel. Zur Berechnung der Coefficienten c der Reihe (4) müssen wir diese und ihre n ersten Ableitungen in (3) einsetzen und den entstehenden Ausdruck identisch zu Null machen. Zu dem Ende bezeichnen wir den Summationsbuchstaben in η jetzt mit s und haben also

$$\eta \equiv \sum_{(s)} c_s x^s \quad (s = \alpha, \alpha + 1, \dots),$$

$$\frac{d^\mu \eta}{dx^\mu} \equiv \eta^{(\mu)} \equiv \sum_{(s)} s(s-1) \dots (s-\mu+1) c_s x^{s-\mu}$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, n).$$

1) S. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. (1875.) S. 319.

da für $s > k$ $p_{r, k-s}$ seine Bedeutung verliert, also $\equiv 0$ zu setzen ist, und

$$v = 0, 1, \dots n.$$

Der Coefficient einer beliebigen Potenz x^k in $P(x, \eta)$ ist daher

$$(6) \quad F_{k\alpha} \equiv \sum_{v=0}^{v=n} \sum_{s=\alpha}^{s=k} p_{r, k-s} s(s-1) \dots (s-n+v+1) c_s$$

oder

$$(6^a) \quad F_{k\alpha} \equiv a_{k\alpha} c_\alpha + a_{k\alpha+1} c_{\alpha+1} + \dots + a_{kk} c_k,$$

wenn

$$(7) \quad a_{ks} \equiv \sum_{v=0}^{v=n} p_{r, k-s} s(s-1) \dots (s-n+v+1)$$

gesetzt wird. Mit Hülfe dieser abkürzenden Bezeichnungen ist also

$$(5^c) \quad P(x, \eta) \equiv \sum_{(k)} F_{k\alpha} x^k \quad (k = \alpha, \alpha+1, \alpha+2, \dots)$$

und

$$(8) \quad F_{k\alpha} \equiv a_{k\alpha} c_\alpha + a_{k\alpha+1} c_{\alpha+1} + \dots + a_{kk} c_k = 0$$

($k = \alpha, \alpha+1, \alpha+2, \dots$)

ein System von Gleichungen, welchem die Coefficienten c genügen müssen, damit Gleichung (3) durch (4) identisch erfüllt wird. Weil Formel (8) aber jedes c_k , sobald $a_{kk} \neq 0$, durch die vorangehenden c ausdrückt, nennt man sie die Recursionsformel der Coefficienten c oder der Reihe (4) oder auch *die zu $x=0$ gehörige Recursionsformel der Differentialgleichung (3)*.

Wir fassen daher den Inhalt dieses Artikels dahin zusammen:

Die Coefficienten c einer sich bei $x=0$ bestimmt verhaltenden Reihe

$$\eta \equiv \sum_{(k)} c_k x^k \quad (k = \alpha, \alpha+1, \dots),$$

welche der Differentialgleichung (3) bei der ihrem Gebiet angehörigen Stelle $x=0$ genügen soll, müssen der Recursionsformel

$$F_{k\alpha} \equiv a_{k\alpha} c_\alpha + a_{k\alpha+1} c_{\alpha+1} + \dots + a_{kk} c_k = 0$$

oder dem aus dieser für $k = \alpha, \alpha+1, \dots$ entspringenden Gleichungssystem genügen.

7. Die determinierende Gleichung. Wir haben bis jetzt noch nicht hervorgehoben, dass wir mit der Recursionsformel zugleich auch schon eine Gleichung gewonnen haben, welcher der Anfangsexponent α der Reihe η genügen muss. Bildet man nämlich die Recursionsformel (8) für $k = \alpha$, so reducirt sich dieselbe auf

$$a_{\alpha\alpha} \cdot c_{\alpha} = 0.$$

Damit also die Reihe mit der Potenz x^{α} beginne, wozu erforderlich ist, dass $c_{\alpha} \neq 0$, muss

$$a_{\alpha\alpha} = 0$$

sein. Der Anfangsexponent α einer Reihe η muss also eine Wurzel der algebraischen Gleichung in k

$$a_{kk} = 0$$

sein, deren linke Seite wir gelegentlich auch durch $F(k)$

$$F(k) \equiv a_{kk}$$

bezeichnen. Wegen dieser Eigenschaft nennt man

$$a_{kk} \equiv F(k) = 0$$

die zu der Stelle $x=0$ gehörige determinierende Gleichung¹⁾, $a_{kk} \equiv F(k)$ die zu $x=0$ gehörige determinierende Function.

Der explicite Ausdruck dieser determinierenden Function ist nach (7)

$$(9) \quad a_{kk} \equiv F(k) \equiv \sum_{v=0}^{v=n} p_{v0} k(k-1) \dots (k-n+v+1),$$

also, da p_{v0} die Anfangscoefficienten der Reihen \mathfrak{P}_v in (3) sind, aus der Differentialgleichung selbst unmittelbar abzulesen.

Wir haben daher das Resultat:

Der Anfangsexponent α einer Reihe η , welche der Differentialgleichung (3) genügen soll, muss eine Wurzel der determinierenden Gleichung

$$a_{kk} \equiv F(k) \equiv \sum_{v=0}^{v=n} \mathfrak{P}_v(0) k(k-1) \dots (k-n+v+1) = 0$$

sein.

8. Grad der determinierenden Gleichung; Stelle der Bestimmtheit.

Die determinierende Function ist nach Vorstehendem eine ganze rationale Function von k , deren Grad zwischen 0 und n variieren kann.

Ist der Grad $= 0$, so besitzt die Gleichung gar keine endliche Wurzel; folglich existiert gar kein Integral unserer Differentialgleichung, das bei $x=0$ die Gestalt einer sich daselbst bestimmt verhaltenden Reihe (4) hat. Dieser Fall tritt offenbar dann ein, wenn p_{n0} der einzige von Null verschiedene unter den Coefficienten p_{v0} ($v=0, 1, \dots, n$) ist.

1) Diese Bezeichnung hat Frobenius eingeführt (Crelles Journ. Bd. 80. S. 318.) — Fuchs nennt dieselbe Gleichung *determinierende Fundamentalgleichung* (Crelles Journ. Bd. 68. S. 367). — Thomé nennt die Differenz zwischen n und dem Grad der determinierenden Gleichung (s. Art. 8) den *charakteristischen Index* (Crelles Journ. Bd. 75. S. 267).

Von besonderer Wichtigkeit ist der entgegengesetzte extreme Specialfall, dass der Grad der determinierenden Gleichung n — gleich der Ordnung der Differentialgleichung — ist. Dieser tritt nach (9) dann und nur dann ein, wenn

$$p_{00} \neq 0,$$

d. h. wenn die Reihe $\mathfrak{P}_0(x)$ in (3) für $x = 0$ nicht verschwindet.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die zu $x = 0$ gehörige determinierende Function von demselben Grad sei wie die Ordnung der Differentialgleichung, besteht also darin, dass bei $x = 0$ die Differentialgleichung in die Form

$$(10) \quad x^n \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \dots + x \mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0$$

gebracht werden kann, wo $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$ keine negativen Potenzen von x enthalten und \mathfrak{P}_0 insbesondere mit einem von Null verschiedenen constanten Glied beginnt.

In (10) kann man natürlich auch durch \mathfrak{P}_0 dividieren und jeden der Quotienten

$$\frac{\mathfrak{P}_v}{\mathfrak{P}_0},$$

da \mathfrak{P}_0 mit einem von Null verschiedenen constanten Glied beginnt, wieder in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickeln. An Stelle von (10) kann daher auch ebenso gut die Form der Differentialgleichung

$$(10') \quad x^n y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{P}_n \cdot y = 0$$

gesetzt werden.

Wir wollen eine Stelle $x = 0$, deren determinierende Function den Grad n hat, und bei der daher die Differentialgleichung die Gestalt (10) oder (10') annehmen kann, aus später ersichtlichen Gründen eine *Stelle der Bestimmtheit* nennen, alle übrigen Stellen, welche jener Bedingung nicht genügen, *Stellen der Unbestimmtheit*. Zu den ersteren gehören insbesondere die *regulären Stellen*. Ist nämlich $x = 0$ eine solche und wäre $p_{00} = 0$, so müsste ja einer der Coefficienten p_{v0} ($v = 1, 2, \dots, n$) $\neq 0$ sein (s. Gl. (3)). Dann würde aber nach Division der Gleichung durch den Coefficienten von $y^{(n)}$ mindestens ein Coefficient für $x = 0$ unendlich werden. Zu den Stellen der Unbestimmtheit gehören alle *wesentlich singulären Stellen*, weil bei ihnen die Form (3) und daher auch (10) der Differentialgleichung ausgeschlossen ist. Die *ausserwesentlich singulären Stellen* können Stellen der Bestimmtheit oder der Unbestimmtheit sein.

9. Specialisierung für reguläre Stellen. Ist $x = 0$ eine *reguläre Stelle* der Differentialgleichung, so können wir die Gleichung in die Gestalt setzen

$$(11) \quad \mathfrak{D}_0 y^{(n)} + \mathfrak{D}_1 y^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{D}_n y = 0,$$

wo $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von x sind und $\mathfrak{D}_0(0) \neq 0$ ist. Um diese Gleichung in die Normalform zu bringen, multiplizieren wir sie mit x^n und haben dann, verglichen mit (3),

$$(12) \quad x^v \mathfrak{D}_v \equiv \mathfrak{P}_v \quad (v = 0, 1, \dots, n).$$

Setzt man also

$$(13) \quad \mathfrak{D}_v = \sum_{\lambda} \frac{\mathfrak{D}_v^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} x^\lambda = \sum_{\lambda} q_{v\lambda} x^\lambda \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots),$$

so ist nach (12)

$$(14) \quad p_{v\lambda} = q_{v, \lambda-v}$$

für $v \geq \lambda$, während für $v < \lambda$ $p_{v\lambda} = q_{v, \lambda-v} = 0$ ist. Die zu der regulären Stelle $x = 0$ gehörige Recursionsformel lautet daher nach (6) und (8) in der Bezeichnung der Gleichung (11)

$$(15) \quad P_{k\alpha} = \sum_{v=0}^n \sum_{s=\alpha}^{n-k} q_{v, k-s-v} s(s-1) \dots (s-n+v+1) c_s = 0.$$

Die determinierende Gleichung ist aber nach (9) und (14)

$$(16) \quad q_{00} s(s-1) \dots (s-n+1) = 0$$

und hat die Wurzeln $0, 1, \dots, n-1$. Setzt man daher in (15) für α die kleinste dieser Wurzeln, $\alpha = 0$, ein, so bemerkt man, dass für $s = 0, 1, \dots, n-v-1$ das Produkt $s(s-1) \dots (s-n+v+1)$ und für $s \geq k-v$ die Grösse $q_{v, k-s-v}$ verschwindet. Daher braucht man über s nur von $s = n-v$ bis $s = k-v$ zu summieren. Die für die kleinste Wurzel $\alpha = 0$ der determinierenden Gleichung gebildete Recursionsformel bei der regulären Stelle $x = 0$ der Differentialgleichung (11) lautet also

$$(17) \quad \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{s=1}^n q_{v, \lambda-s-v} s(s-1) \dots (s-n+v+1) c_s = 0.$$

Man kann die Recursionsformel einer Reihe, welche in der Umgebung der regulären Stelle $x = 0$ der Differentialgleichung (11) genügen soll, noch in anderer Weise ableiten. Da nämlich die determinierende Gleichung (16) die Wurzeln $0, 1, \dots, n-1$ hat, kann eine solche Reihe nur in der Form:

$$\eta = \sum_{(k)} c_k x^k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

angesetzt werden. Nach dem Taylor'schen Satz ist aber dann

$$c_k \equiv \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k \eta}{dx^k} \right)_{x=0}.$$

Um also eine Beziehung zwischen den c zu ermitteln, braucht man nur eine solche zwischen den Ableitungen verschiedener Ordnung von η aufzustellen und dann $x=0$ zu setzen. Eine Beziehung der letzteren Art ist aber aus der Differentialgleichung (11) leicht zu finden. Differenziert man nämlich diese Gleichung, die wir mittelst des Summenzeichens kurz so schreiben

$$\sum_{r=0}^{r=n} \mathfrak{D}_r(x) \cdot \eta^{(n-r)} = 0,$$

$(k-n)$ -mal nach x , so ergibt sich

$$\sum_{r=0}^{r=n} \sum_{s=k-n}^{s=k-r} \binom{k-n}{r} \mathfrak{D}_r^{(s)}(x) \eta^{(k-r-s)} = 0.$$

Setzt man hierin $x=0$ und demgemäss

$$(k-r-s)! c_{k-r-s} \text{ statt } \eta^{(k-r-s)},$$

so folgt

$$(18) \quad \sum_{r=0}^{r=n} \sum_{s=k-n}^{s=k-r} \mathfrak{D}_r^{(s)}(0) \binom{k-n}{r} (k-r-s)! c_{k-r-s} = 0.$$

Führt man hier für r durch die Gleichung

$$r = k - v - s$$

den Summationsbuchstaben s ein, der also von $k-v$ bis $n-v$ läuft, während r von 0 bis $k-n$ geht, und dividiert (18) durch den von den Summationsbuchstaben v, r unabhängigen und daher allen Gliedern gemeinsamen Faktor $(k-n)!$, so wird (18) mit der auf anderem Weg abgeleiteten Formel (17) identisch.

Für eine spätere Anwendung heben wir noch hervor, was ohne Schwierigkeit aus (7) und (14) abzulesen ist, dass, wenn man (17) in die Gestalt (8) setzt

$$a_{kk} c_k + a_{k,k-1} c_{k-1} + \dots = 0,$$

a_{kk} den Faktor $k(k-1) \dots (k-n+1)$, $a_{k,k-1}$ den Faktor $(k-1)(k-2) \dots (k-n+1)$ u. s. w. $a_{k,k-n+1}$ den Faktor $(k-n+1)$ enthält.

Als Hauptinhalt dieses Artikels sprechen wir aus:

Die Wurzeln der zu einer regulären Stelle gehörigen determinanten Gleichung sind

$$0, 1, \dots, n-1;$$

wobei nach (7)

$$a_{kk} \equiv k(k-1) \dots (k-n+1) + a_1 k \dots (k-n+2) + \dots + a_n.$$

Hiernach sind nur diejenigen $c_k \neq 0$ und zwar ganz beliebig, deren Index eine Wurzel der determinierenden Gleichung

$$a_{kk} = 0$$

ist. Sind also

$$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$$

deren Wurzeln, so genügen die mit willkürlichen Constanten multiplizierten Potenzen

$$x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n}$$

der vorgelegten Differentialgleichung.

3. Beispiel:

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0,$$

worin α, β, γ Constanten, — eine sehr berühmte Gleichung, die wir, weil sie von Gauss zuerst behandelt wurde¹⁾, immer als *Gauss'sche Differentialgleichung* citieren wollen — hat $x=0$ und $x=1$ als *ausserwesentlich singuläre aber Bestimmtheitsstellen*.

a) bei $x=0$ erhält die Differentialgleichung die Normalform durch Multiplication mit x . Dann sind

$\mathfrak{P}_0(x) \equiv x-1$, $\mathfrak{P}_1(x) \equiv -[\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]$, $\mathfrak{P}_2(x) \equiv \alpha\beta x$ ganze Functionen von x ersten Grades. Also wird die determinierende Gleichung

$$-k(k-1) - \gamma k = 0$$

mit den Wurzeln

$$0, 1 - \gamma.$$

Führt man in der Recursionsformel die Summation über $\nu = 0, 1, 2$ aus, so lautet dieselbe

$$\sum_{(s)} \left[s(s-1) \frac{\mathfrak{P}_0^{(k-s)}(0)}{(k-s)!} + s \frac{\mathfrak{P}_1^{(k-s)}(0)}{(k-s)!} + \frac{\mathfrak{P}_2^{(k-s)}(0)}{(k-s)!} \right] c_s = 0,$$

worin $s = k, k-1, \dots$ zu setzen ist. Wenn aber $s < k-1$, verschwinden alle Grössen infolge der Werte von $\mathfrak{P}_0(x), \mathfrak{P}_1(x), \mathfrak{P}_2(x)$. Somit erhält man die *zweiglidrige Recursionsformel*

$$c_k [-k(k-1) - \gamma k] + c_{k-1} [(k-1)(k-2) + (k-1)(\alpha + \beta + 1) + \alpha\beta] = 0$$

oder

$$c_k k(k + \gamma - 1) = c_{k-1} (k + \alpha - 1)(k + \beta - 1).$$

1) Gauss, Werke Bd. III. p. 207 ff.

b) Bei $x = 1$ müssen die Coefficienten erst nach Potenzen von $x - 1$ geordnet werden:

$$(x-1)(1+x-1)y'' + [\alpha + \beta + 1 - \gamma + (\alpha + \beta + 1)(x-1)]y' + \alpha\beta \cdot y = 0.$$

Nun verfahren wir genau wie vorher, nur muss in den Formeln statt $x = 0$ $x = 1$ gesetzt werden.

Es ist

$$\mathfrak{P}_0(x-1) = 1 + (x-1), \quad \mathfrak{P}_1(x-1) = \alpha + \beta + 1 - \gamma + (\alpha + \beta + 1)(x-1), \\ \mathfrak{P}_2(x-1) = \alpha\beta(x-1).$$

Die determinierende Gleichung wird also

$$\mathfrak{P}_0(1)k(k-1) + \mathfrak{P}_1(1)k + \mathfrak{P}_2(1) \equiv k(k + \alpha + \beta - \gamma) = 0$$

mit den Wurzeln

$$0, \gamma - \alpha - \beta$$

und die Recursionsformel schliesslich

$$c_k k(k + \alpha + \beta - \gamma) + c_{k-1}(k + \alpha - 1)(k + \beta - 1) = 0.$$

4. Beispiel:

$$x^3 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0.$$

$x = 0$ ist *ausserwesentlich singular* und Stelle der Unbestimmtheit; denn es ist

$$\mathfrak{P}_0(x) \equiv x, \quad \mathfrak{P}_1(x) \equiv a_1, \quad \mathfrak{P}_2(x) \equiv a_2,$$

die determinierende Function also

$$k a_1 + a_2$$

nur *ersten* Grades.

5. Beispiel:

$$x^3 y'' + a_1 x^2 y' + a_2 y = 0.$$

$x = 0$ ist wieder *Stelle der Unbestimmtheit*,

$$\mathfrak{P}_0(x) \equiv x, \quad \mathfrak{P}_1(x) \equiv a_1 x, \quad \mathfrak{P}_2(x) \equiv a_2;$$

die zu $x = 0$ gehörige determinierende Function ist also

$$a_2,$$

d. h. von x unabhängig; die determinierende Gleichung hat also gar keine endliche Wurzel, und es gibt in diesem Fall sicher keine sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltende Reihe, welche der Differentialgleichung genügt.

Kapitel II.

Berechnung der Reihencoefficienten aus der Recursionsformel¹⁾.

11. Präcisierung der Aufgabe. Wir haben im vorigen Kapitel durch die Recursionsformel ein System von Gleichungen, denen die Coefficienten $c_\alpha, c_{\alpha+1}, \dots$ der versuchsweise für y in die Differentialgleichung eingesetzten Reihe genügen müssen, und damit gleichzeitig eine Gleichung für den Anfangsexponenten α gewonnen. Wir haben aber noch nicht untersucht, *in welcher Weise sich die Coefficienten c aus jenen Gleichungen berechnen.* Insbesondere haben wir nur festgestellt, dass der Anfangsexponent α der *notwendigen* Bedingung unterliegt, eine Wurzel der determinierenden Gleichung zu sein; wir wissen aber nicht, *ob umgekehrt zu jeder Wurzel α derselben thatsächlich eine Reihe gehört,* d. h. ob gerade bei diesem α die aus der Recursionsformel fließenden Gleichungen durch einen von Null verschiedenen Wert von c_α zu erfüllen sind, *bezw. unter welchen Bedingungen dies der Fall ist.*

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder die Gleichung $a_{kk} = 0$ hat *keine* Wurzel, welche α um eine positive ganze Zahl übertrifft, oder sie hat mindestens eine solche. Im ersten Falle bleibt nach der für $k = \alpha$ aus der Recursionsformel gebildeten Gleichung c_α völlig willkürlich; dann aber ist in keiner der unendlich vielen folgenden Gleichungen der Coefficient des höchsten, durch diese Gleichung neu eingeführten c Null; mithin sind alle diese c als einfache Multipla des ersten willkürlich bleibenden c_α ausgedrückt, nämlich

$$c_k \equiv (-1)^{k-\alpha} \cdot c_\alpha \frac{D_{\alpha k}}{a_{\alpha+1, \alpha+1} \cdot a_{\alpha+2, \alpha+2} \cdot \dots \cdot a_{k k}},$$

wo

$$D_{\alpha k} \equiv \begin{vmatrix} a_{\alpha+1, \alpha} & a_{\alpha+1, \alpha+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{\alpha+2, \alpha} & a_{\alpha+2, \alpha+1} & a_{\alpha+2, \alpha+2} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{k-1, \alpha} & a_{k-1, \alpha+1} & a_{k-1, \alpha+2} & \dots & \dots & a_{k-1, k-1} \\ a_{k \alpha} & a_{k, \alpha+1} & a_{k, \alpha+2} & \dots & \dots & a_{k k-1} \end{vmatrix}.$$

1) Vgl. des Verf. Hab.-Schrift, Giessen 1888, und Crelles Journ. Bd. 111. (1893). S. 59—63.

Wir haben also das Resultat:

Ist α eine Wurzel der determinierenden Gleichung, welche von keiner andern Wurzel derselben um eine positive ganze Zahl übertroffen wird, so gehört zu ihr stets eine Reihe.

Im zweiten Falle dagegen giebt es mindestens eine Wurzel von $a_{kk} = 0$, die α um eine positive ganze Zahl übertrifft. Wir wollen eine Gesamtheit aller solcher Wurzeln von $a_{kk} = 0$, die sich nur um ganze Zahlen oder Null von einander unterscheiden, eine *Gruppe von Wurzeln* dieser Gleichung nennen. Gehört also α einer solchen Gruppe an, so sei ν die Wurzel der Gruppe mit dem grössten reellen Teil oder — wie wir kurz sagen wollen — die *grösste* Wurzel der Gruppe. Dann ergibt also die Recursionsformel (wenn von der ersten Gleichung $a_{\alpha\alpha} \cdot c_{\alpha} = 0$ abgesehen wird, weil $a_{\alpha\alpha} = 0$) für

$$k = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \nu - 1, \nu$$

zunächst ein System von $\nu - \alpha$ linearen homogenen Gleichungen zwischen ebensoviel Unbekannten

$$c_{\alpha}, c_{\alpha+1}, \dots, c_{\nu-1},$$

während die nächste Gleichung die beiden neuen Unbekannten c_{ν} und $c_{\nu+1}$ einführt und von dieser an der Coefficient des höchsten c niemals mehr verschwindet. Es bleibt demnach c_{ν} völlig willkürlich, und von $c_{\nu+1}$ ab sind alle Coefficienten c lineare homogene Functionen der Grössen

$$c_{\alpha}, c_{\alpha+1}, \dots, c_{\nu}.$$

Es ist nun die Frage, ob jenes System von $\nu - \alpha$ Gleichungen ein anderes Lösungssystem besitzt als dasjenige, bei dem alle $c_{\alpha} \dots c_{\nu-1} = 0$ sind, und speziell ein solches, bei dem c_{α} nicht notwendig gleich Null ist.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür zu ermitteln, ist die Aufgabe der jetzt folgenden Untersuchung.

12. Einführung von Bezeichnungen. Bezeichnen wir die von einander verschiedenen Wurzeln der Gruppe von α bis ν mit

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \lambda, \mu, \nu,$$

wo also jede um eine positive ganze Zahl grösser ist als die vorhergehende, so lautet das zu untersuchende System linearer homogener Gleichungen

$$0 = a_{\alpha+1, \alpha} c_{\alpha} + a_{\alpha+1, \alpha+1} c_{\alpha+1}$$

$$0 = a_{\alpha+2, \alpha} c_{\alpha} + a_{\alpha+2, \alpha+1} c_{\alpha+1} + a_{\alpha+2, \alpha+2} c_{\alpha+2}$$

$$0 = a_{\beta-1, \alpha} c_{\alpha} + \dots + a_{\beta-1, \beta-1} c_{\beta-1}$$

$$0 = a_{\beta, \alpha} c_{\alpha} + \dots + a_{\beta, \beta-1} c_{\beta-1}$$

$$0 = a_{\beta+1, \alpha} c_{\alpha} + \dots + a_{\beta+1, \beta-1} c_{\beta-1} + a_{\beta+1, \beta} c_{\beta} + a_{\beta+1, \beta+1} c_{\beta+1}$$

$$0 = a_{\gamma+1, \alpha} c_{\alpha} + \dots + a_{\gamma+1, \gamma-1} c_{\gamma-1}$$

$$0 = a_{\gamma, \alpha} c_{\alpha} + \dots + a_{\gamma, \gamma-1} c_{\gamma-1}$$

oder kurz geschrieben

$$(1) \quad 0 = \sum_{s=\alpha}^{s=k} a_{ks} c_s = R'_{k\alpha} \quad (k = \alpha+1, \alpha+2, \dots),$$

wobei

$$a_{\beta\beta} = a_{\gamma\gamma} = a_{\delta\delta} = \dots = a_{\mu\mu} = a_{\nu\nu} = 0,$$

alle andern a_{kk} aber von Null verschieden sind. Es ist zu untersuchen, unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen speziell c_{α} willkürlich bleibt, also nicht notwendig gleich Null gesetzt werden muss.

Es ist klar, dass, wie das Verschwinden von $a_{\alpha\alpha}$ stets notwendig war, das Verschwinden aller Grössen

$$a_{k\alpha} \quad (k = \alpha, \alpha+1, \dots, \nu)$$

unter allen Umständen *hinreichend* für die Willkürlichkeit von c_{α} ist. Dies würde aber eine Lösung des Problems nur für einen so speziellen Fall bedeuten, dass wir nach Bedingungen von mehrsagendem Inhalt forschen müssen.

Zu diesem Zweck führen wir noch einige abkürzende Bezeichnungen ein. Das Gleichungssystem (1) werde mit

$$S_{\alpha\nu} \text{ oder kurz } S,$$

die zugehörige Determinante, gebildet aus den Coefficienten von $S_{\alpha\nu}$, mit

$$D_{\alpha\nu} \text{ oder kurz } D$$

bezeichnet; allgemein sei

$$S_{\varrho\sigma} \text{ und } D_{\varrho\sigma}$$

das System, bzw. die Determinante, welches aus S (bzw. aus D) entsteht, wenn α durch ϱ , ν durch σ ersetzt wird und dabei ϱ irgend eine der Zahlen $\alpha, \beta, \dots, \mu$, σ irgend eine der Zahlen $\beta, \gamma, \dots, \mu, \nu$, die grösser als ϱ , bedeutet.

Hiernach ¹⁾ ist zunächst D , die Determinante des ganzen Systems S , als Produkt einer Anzahl von Unterdeterminanten darstellbar, nämlich

$$(2) \quad D \equiv D_{\alpha \nu} = D_{\alpha \beta} \cdot D_{\beta \gamma} \cdot D_{\gamma \delta} \dots D_{\mu \nu}.$$

In D und in allen Unterdeterminanten jeder Ordnung derselben ist nun jede Zeile durch den ersten (k), jede Colonne durch den zweiten Index (s) charakterisiert. Wir wollen deshalb kurz von „Zeile k “ und „Colonne s “ sprechen. Dann bezeichnen wir die Determinante, die aus $D_{\alpha \gamma}$ durch Fortlassung von Zeile β und Colonne β entsteht (d. h. durch Fortlassung der beiden Reihen, welche sich an der Stelle des Elementes $\alpha_{\beta \beta}$ kreuzen), mit

$$D_{\alpha(\beta)\gamma};$$

die Determinante, die aus $D_{\beta \delta}$ durch Fortlassung von Zeile und Colonne γ entsteht, mit

$$D_{\beta(\gamma)\delta}; \text{ u. s. w.};$$

ähnlich die Determinante, welche aus $D_{\alpha \delta}$ durch Fortlassung der Zeilen und Colonnen β und γ entsteht, mit

$$D_{\alpha(\beta \gamma)\delta};$$

die aus $D_{\beta \epsilon}$ durch Fortlassung der Zeilen und Colonnen γ und δ entstehende Determinante mit

$$D_{\beta(\gamma \delta)\epsilon}; \text{ u. s. w.};$$

u. s. w.; endlich die Determinante, die aus $D_{\alpha \nu}$ durch Fortlassung aller Zeilen und aller Colonnen $\beta, \gamma, \delta, \dots, \mu$ entsteht, mit

$$D_{\alpha(\beta \gamma \dots \mu)\nu}.$$

Im Ganzen bilden wir so das folgende System von Determinanten

$$(3) \quad \begin{cases} D_{\alpha \beta} \\ D_{\alpha(\beta)\gamma} & D_{\beta \gamma} \\ D_{\alpha(\gamma)\delta} & D_{\beta(\gamma)\delta} & D_{\gamma \delta} \\ D_{\alpha(\beta \gamma)\delta} & D_{\beta(\gamma \delta)\epsilon} & D_{\gamma(\delta)\epsilon} & D_{\delta \epsilon} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{\alpha(\beta \gamma \dots \mu)\nu} & D_{\beta(\gamma \delta \dots \mu)\nu} & D_{\gamma(\delta \dots \mu)\nu} & D_{\delta(\dots \mu)\nu} \dots D_{\mu \nu}. \end{cases}$$

Endlich setzen wir noch die nach Voraussetzung von Null verschiedenen Produkte

1) Vergl. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. 5. Aufl. Leipzig 1881. § 4. 2. S. 33.

die Adjuncten der Elemente der ersten Colonne in der Determinante $D_{\alpha\beta}$, sodass insbesondere

$$d_{\beta\beta} = \pm A_{\alpha\beta} \neq 0$$

ist, so besteht die Identität

$$(7) \quad d_{\alpha+1, \beta} I'_{\alpha+1, \alpha} + d_{\alpha+2, \beta} I'_{\alpha+2, \alpha} + \dots + d_{\beta\beta} I'_{\beta\alpha} = c_{\alpha} \cdot D_{\alpha\beta}.$$

Sucht man nämlich links die Coefficienten von c_{α} , $c_{\alpha+1}$, ..., $c_{\beta-1}$ auf, so sind dies Determinanten, deren erste gerade $D_{\alpha\beta}$ ist, während in allen übrigen je zwei gleiche Colonnen (nämlich bezw. die 1^{te} und 2^{te}, 1^{te} und 3^{te} u. s. w.) vorkommen. Die Identität (7) lehrt, dass nicht nur die Gleichung

$$(8) \quad c_{\alpha} \cdot D_{\alpha\beta} = 0$$

eine Folge des Systems $S_{\alpha\beta}$ ist, — denn wenn die Gleichungen des Systems $S_{\alpha\beta}$ erfüllt sind, verschwindet ja die linke Seite von (7), — sondern auch umgekehrt, weil $d_{\beta\beta} \neq 0$, die Gleichung

$$I'_{\beta\alpha} = 0$$

eine Folge der Gleichungen

$$I'_{\alpha+1, \alpha} = 0, \dots, I'_{\beta-1, \alpha} = 0 \quad \text{und (8)}$$

ist. Das Teilsystem $S_{\alpha\beta}$ ist daher dem System äquivalent, welches aus $S_{\alpha\beta}$ entsteht, wenn die Gleichung $I'_{\beta\alpha} = 0$ durch (8) ersetzt wird.

Betrachten wir nun das Teilsystem $S_{\alpha\gamma}$ von $S_{\alpha\gamma}$, in dem wir uns aber die Gleichung $I'_{\beta\alpha} = 0$ schon durch (8) ersetzt denken und die letztere, weil sie schon die gewünschte Form hat, dass die c_s ($s \vdash \alpha, \beta, \dots, \mu$) nicht mehr darin vorkommen, auslassen, so handelt es sich also jetzt um die Gleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} I'_{\alpha+1, \alpha} = 0, \dots, I'_{\beta-1, \alpha} = 0 \\ I'_{\beta+1, \alpha} = 0, \dots, I'_{\gamma-1, \alpha} = 0, \quad I'_{\gamma\alpha} = 0. \end{cases}$$

Sind nun

$$\begin{aligned} & d_{\alpha+1, \gamma}, \dots, d_{\beta-1, \gamma} \\ & d_{\beta+1, \gamma}, \dots, d_{\gamma-1, \gamma}, \quad d_{\gamma\gamma} \end{aligned}$$

die Adjuncten der Elemente der ersten Colonne der Determinante $D_{\alpha(\beta)\gamma}$, wobei insbesondere

$$d_{\gamma\gamma} = \pm A_{\alpha\gamma} \neq 0,$$

so besteht die wie (7) zu beweisende Identität

$$(7') \quad d_{\alpha+1, \gamma} I'_{\alpha+1, \alpha} + \dots + d_{\beta-1, \gamma} I'_{\beta-1, \alpha} + d_{\beta+1, \gamma} I'_{\beta+1, \alpha} + \dots + d_{\gamma\gamma} I'_{\gamma\alpha} = c_{\alpha} D_{\alpha(\beta)\gamma} \pm c_{\beta} A_{\alpha\beta} D_{\beta\gamma}.$$

Diese lehrt wiederum, dass nicht nur die Gleichung

Hieraus ziehen wir noch die Folgerungen, die sich ebenso unmittelbar ergeben, wie die entsprechende Bemerkung zu Anfang des Artikels 12 in Bezug auf das System S :

Das Verschwinden von $D_{\alpha\beta}$ ist eine stets notwendige, und das Verschwinden von $D_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha(\beta)\gamma}$, $D_{\alpha(\beta\ldots\gamma)}$ eine Gruppe stets hinreichender Bedingungen dafür, dass e_α willkürlich bleibt.

Ersteres hätte man natürlich auch daraus erschliessen können, dass ohne das Verschwinden von $D_{\alpha\beta}$ bereits das erste Teilsystem $S_{\alpha\beta}$ nur die triviale Lösung besitzt, bei der alle $c = 0$ sind. Wir bemerken noch, dass die Coefficienten der c in (10) abgesehen von den A gerade die in (3) zusammengestellten Determinanten sind.

14. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass zu einer Wurzel der determinierenden Gleichung eine Reihe gehört. Die soeben ermittelte notwendige Bedingung setzen wir nunmehr als erfüllt voraus und sehen daher von der ersten der Gleichungen (10) ganz ab. Dann hat man aber in den übrigen Gleichungen (10) ein System von ähnlicher Form wie (1) oder S und, wenn $D_{\mu r} = 0$, sogar ein völlig analoges. Ist aber $D_{\mu r} \neq 0$, so kann man die letzte der Gleichungen (10) einfach fortlassen — gerade wie ganz zu Anfang die Gleichungen $I'_{r+1, \alpha} = 0$, $I'_{r+2, \alpha} = 0, \dots$ — weil sie über c_α nichts aussagt. Dieselbe Betrachtung knüpft sich dann an die vorletzte der Gleichungen (10) u. s. w. Sind nun sämtliche Determinanten

$$D_{\mu\nu}, D_{\lambda\mu}, \dots, D_{\beta\gamma} \neq 0,$$

so bleibt von dem ganzen System (10) nichts mehr übrig ausser der ersten Gleichung, und *die stets notwendige Bedingung*

$$D_{\alpha\beta} = 0$$

ist in diesem Falle allein auch schon hinreichend.

Andernfalls sei etwa

Dur,

von $D_{\mu\nu}$ aus gerechnet, die erste jener Determinanten, die verschwindet, so behält man von (10) nur die Gleichungen

$$(1') \quad \begin{cases} (1) \rightarrow c_\alpha D_{\alpha(\beta)\gamma} + c_\beta A_{\alpha\beta} D_{\beta\gamma} \\ \vdots \\ (1) \rightarrow c_\alpha D_{\alpha(\beta \dots q)u} + c_\beta A_{\alpha\beta} D_{\beta(\gamma \dots q)u} + \dots + c_q A_{\alpha q} D_{qu} \\ (1) \rightarrow c_\alpha D_{\alpha(\beta \dots n)r} + c_\beta A_{\alpha\beta} D_{\beta(\gamma \dots n)r} + \dots + c_p A_{\alpha p} D_{p(n)r} \end{cases}$$

bei und besitzt in ihnen also ein dem System S völlig analog gebautes System, das wir mit S' bezeichnen wollen.

Mit diesem System S' verfahren wir nun genau wie vorher mit S ; wir ersetzen dasselbe durch ein in Bezug auf c_α und diejenigen

ändern c , deren Coefficient in der sie neu einführenden Gleichung von S' verschwindet, äquivalentes System, welches also zusammen mit Gleichung (8) in Bezug auf die c , die es noch enthält, dem ursprünglichen System S äquivalent ist. Dieses System liefert wieder eine notwendige Bedingung der Form

$$c_\alpha \cdot D' = 0;$$

dann bildet man ein System S'' u. s. w., bis man zu einem System $S^{(m)}$ gelangt, welches nur eine einzige notwendige und — für dieses System $S^{(m)}$ — zugleich hinreichende Bedingung liefert in Gestalt einer Gleichung

$$c_\alpha \cdot D^{(m)} = 0.$$

Wegen der Acquivalenz der sämtlichen so erhaltenen Gleichungen

$$(11) \quad c_\alpha D_{\alpha\beta} = 0, \quad c_\alpha D' = 0, \dots, c_\alpha D^{(m)} = 0$$

mit dem ursprünglichen System S in Bezug auf c_α stellen die Gleichungen

$$(12) \quad D_{\alpha\beta} = 0, \quad D' = 0, \dots, D^{(m)} = 0$$

die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dar, dass c_α willkürlich bleibt, d. h. dass zu α thatsächlich eine Reihe gehört.

Das System $S^{(m)}$ wird aber nach einer endlichen Anzahl (m) von Operationen erreicht, weil bei jedem Schritt von einem System $S^{(k)}$ zu $S^{(k+1)}$ die Zahl der Gleichungen sich mindestens um die Einheit erniedrigt.

15. Die willkürlichen Constanten der Reihen. Bei dem Übergang von dem ursprünglichen System S , welches die Unbekannten

$$c_\alpha c_{\alpha+1} \dots c_{r-1}$$

enthielt, bis zu dem für die Berechnung von c_α schliesslich an seine Stelle gesetzten System der Gleichungen (11) sind also nach und nach sämtliche c ausser c_α aus den Gleichungen ausgefallen, jedoch auf zweierlei wesentlich verschiedene Art: die einen, weil sie sich entweder schon zufolge dem System S oder S' oder einem der späteren nur durch die vorangehenden c ausdrückten und deshalb die Gleichungen, die sie einführten, einfach weggelassen werden konnten, — die andern, gerade wie c_r in dem ursprünglichen System S , weil sie in einem der an Stelle von S tretenden Systeme erst in der letzten Gleichung auftreten konnten, durch Verschwinden ihres Coefficienten aber thatsächlich von selbst aus dem ganzen System ausfielen. So verhielt es sich z. B. in dem System (1') oder S' mit der Unbekannten c_α . Diese letzteren c bleiben also auf Grund des Systems S , d. h. nach der Recursionsformel willkürlich. Da diese Eigenschaft natürlich dadurch, dass

wir dem c_α — wenn dasselbe willkürlich ist — den Wert 0 beilegen, nicht beeinflusst wird, so erhält, dass zu jedem Index der in der Reihe

$$\eta = \sum_{(k)} c_k x^k \quad (k = \alpha, \alpha + 1, \dots)$$

willkürlich bleibenden c ebenfalls wie zu α thatsächlich eine Reihe gehört. In der That ist es nicht schwierig, aber für uns nicht mehr notwendig, zu zeigen, dass, wenn z. B. c_ε , wo ε eine der Zahlen $\beta, \gamma, \dots, \mu$, einer der in der Reihe η aus dem oben angeführten Grund willkürlich bleibenden Coefficienten ist, das schliessliche Ausfallen von c_ε aus den Systemen $S, S', \dots S^{(m)}$ gerade dadurch bewirkt wird, dass die Bedingungen (12), statt für α für ε gebildet, erfüllt sind. Unsere Untersuchungsmethode beantwortet also mehr, als wir anfänglich gefragt hatten: wir besitzen nicht nur die notwendigen und hinreichenden Bedingungen (12), unter denen zu α eine Reihe gehört, sondern wir erfahren bei Aufstellung jener Bedingungen gleichzeitig, welche Coefficienten in der zu α gehörigen Reihe willkürlich bleiben, oder — mit anderen Worten — zu welchen grösseren Wurzeln der Gruppe ausser α Reihen gehören.

Nehmen wir daher für α die Wurzel der Gruppe mit dem kleinsten reellen Teil, so ist also mit der Durchführung der Untersuchung für diese schon die ganze Frage erledigt, d. h. wir kennen bereits sämtliche Wurzeln der Gruppe, zu denen Reihen gehören.

Verstehen wir nun unter α_1 die kleinste Wurzel der ganzen Gruppe (d. h. diejenige mit dem kleinsten reellen Teil), zu welcher eine Reihe gehört, und seien etwa

$$\beta_1, \gamma_1, \dots, \mu_1 \text{ und } \nu$$

die Indices der in der zu α_1 gehörigen Reihe

$$\eta = \sum_{(k)} c_k x^k \quad (k = \alpha_1, \alpha_1 + 1, \dots)$$

willkürlich bleibenden c , so ist nach der Recursionsformel jedes andere c_k eine lineare homogene Function der willkürlich bleibenden Coefficienten

$$c_{\alpha_1}, c_{\beta_1}, c_{\gamma_1}, \dots, c_{\mu_1}, c_\nu,$$

bezw. nur derjenigen von diesen, die ihm schon vorangehen.

Bezeichnen wir, um dies hervorzuheben, für den Augenblick das Integral η selbst als lineare homogene Function dieser Coefficienten

$$(13) \quad \eta = L(c_{\alpha_1}, c_{\beta_1}, \dots, c_{\mu_1}, c_\nu),$$

so ist η offenbar die allgemeinste von der Recursionsformel gelieferte Reihe, in welcher die Exponenten sämtlicher auftretenden Potenzen von x

sich von den Wurzeln der betrachteten Gruppe nur um ganze Zahlen oder Null unterscheiden. Da aber für eine solche lineare homogene Function die Identität besteht

$$(14) \quad L(c_{\alpha_1} c_{\beta_1} \dots c_{\mu_1} c_v) \equiv L(c_{\alpha_1}, 0, \dots, 0) + L(0, c_{\beta_1}, 0, \dots, 0) + \dots + L(0, 0, \dots, 0, c_v),$$

so ist es völlig gleichwertig, ob man mit der allgemeinsten Reihe (13) oder den *partikulären* Reihen, die auf der rechten Seite von (14) erscheinen, weiter operiert.

Den wichtigen Inhalt dieses Artikels und zugleich die Hauptergebnisse des ganzen Kapitels fassen wir folgendermassen zusammen:

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \nu$ die sämtlichen von einander verschiedenen Wurzeln einer Wurzelgruppe der determinierenden Gleichung, in dieser Folge so geordnet, dass die reellen Teile stets wachsen, so liefert die Recursionsformel stets eine zu der grössten Wurzel ν gehörige Reihe, deren Anfangscoefficient willkürlich bleibt, während alle folgenden Coefficienten Multipla von ihm sind. — Die Bedingungen (12), für die kleinste Wurzel α gebildet, zeigen, ob auch zu einer oder mehreren, bezw. zu welchen der Wurzeln $\alpha, \beta, \dots, \mu$ eine Reihe gehört. Ist dies etwa bei $\alpha_1, \beta_1 \dots \mu_1$ der Fall, so bleiben in der zu α_1 gehörigen Reihe noch die Coefficienten

$$c_{\alpha_1}, c_{\beta_1}, \dots, c_{\mu_1}, c_v$$

willkürlich, während alle übrigen c linear und homogen in diesen sind. Diese Reihe ist die allgemeinste nach der Recursionsformel zu bildende, deren Exponenten sich von den Zahlen der Wurzelgruppe $\alpha, \beta, \dots, \nu$ nur um ganze Zahlen unterscheiden.

16. Zwei extreme Specialfälle. Obwohl wir im Vorangehenden die für das gegenwärtige Kapitel aufgeworfene Frage bereits ganz allgemein gelöst haben, wollen wir als besonders bemerkenswert noch zwei einander extrem gegenüber stehende Specialfälle ausdrücklich hervorheben, deren einen wir in Artikel 14 schon flüchtig berührt haben. Wir fanden dort: Wenn die Determinanten

$$D_{\beta\gamma}, D_{\gamma\delta}, \dots, D_{\mu\nu} \neq 0$$

sind, ist die eine Bedingung $D_{\alpha\beta} = 0$ allein schon notwendig und hinreichend, damit zu α eine Reihe gehört.

Wir können die Voraussetzungen hierfür noch anders aussprechen. Wenn nämlich die obigen Determinanten nicht Null sind, kann zu keiner der Wurzeln

$$\beta, \gamma, \dots, \mu$$

eine Reihe gehören, weil ja das Verschwinden der Determinante $D_{\alpha\varrho}$ etwa eine notwendige Bedingung dafür wäre, dass zu ϱ eine Reihe

— Aber auch umgekehrt: Wenn zu keiner der Zahlen $\beta, \gamma, \dots, \mu$ eine Reihe gehört, müssen die sämtlichen Determinanten

$$D_{\beta\gamma}, D_{\gamma\delta}, \dots, D_{\mu\nu} \neq 0$$

Wäre nämlich $D_{\alpha\sigma}$, von $D_{\mu\nu}$ aus gerechnet, die erste dieser Determinanten, die verschwindet, so würde ja nach dem in Artikel 14 genannten und soeben in Erinnerung gebrachten Satz dies schon notwendig und hinreichend dafür sein, dass zu α eine Reihe gehört. Also kann wir jenen Satz auch so aussprechen:

Wenn — abgesehen von der grössten Wurzel ν — zu keiner der Wurzeln $\beta, \gamma, \dots, \mu$, deren reelle Teile grösser sind als der von α ($\beta, \gamma, \dots, \mu$), eine Reihe gehört, oder — was sich damit deckt — wenn die Determinanten $D_{\beta\gamma}, \dots, D_{\mu\nu} \neq 0$ sind, so ist die einzige Bedingung

$$D_{\alpha\beta} = 0$$

hinreichend und notwendig dafür, dass zu α eine Reihe gehört.

Tritt dagegen der entgegengesetzte Specialfall ein, dass zu *allen* Wurzeln $\beta, \gamma, \dots, \mu, \nu$, deren reeller Teil grösser als der von α ist, eine Reihe gehört, so folgt zunächst das Verschwinden von $D_{\mu\nu}$, da Voraussetzung zu μ eine Reihe gehört. Bildet man dann das dem System (10) entsprechende System für λ , so lautet es

$$0 = c_\lambda D_{\lambda\mu}$$

$$0 = c_\lambda D_{\lambda(\mu)\nu} + c_\mu A_{\lambda\mu} D_{\mu\nu};$$

oder $D_{\mu\nu} = 0$ und nach Voraussetzung zu λ eine Reihe gehört, auch

$$D_{\lambda\mu} = 0, \quad D_{\lambda(\mu)\nu} = 0$$

u. s. w. Folglich reduciren sich in diesem Falle die rechten Seiten der Gleichungen (10) auf die Glieder mit c_α und das Verschwinden derselben sämtlichen Coefficienten

$$D_{\alpha\beta}, D_{\alpha(\beta)\gamma}, \dots, D_{\alpha(\beta\dots\mu)\nu},$$

was eine Gruppe stets hinreichender Bedingungen abgab (s. Artikel 13 Schluss), ist hier auch *notwendig*, damit c_α willkürlich bleibt.

Wir haben also als Gegenstück zu dem obigen Satz:

Wenn α eine beliebige Wurzel der Gruppe und zu allen Wurzeln $\beta, \gamma, \dots, \mu, \nu$ mit grösserem reellen Teil eine Reihe gehört, so sind die stets bestehenden Bedingungen (das Verschwinden der Determinanten in der 1. Column der Tabelle (3)) auch sämtlich notwendig dafür, dass zu α eine Reihe gehört.

Hiermit sind wir auch unmittelbar im Besitz der Bedingungen, dass zu *jeder* Wurzel der Gruppe eine Reihe gehört. Ist nämlich α die kleinste Wurzel der Gruppe, sodass

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \nu$$

sämtliche Wurzeln derselben sind, so bestehen jene Bedingungen nach dem soeben ausgesprochenen Satz in dem Verschwinden sämtlicher Determinanten (3):

Sind $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu$ die sämtlichen Wurzeln einer Gruppe, so bestehen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass zu jeder von ihnen eine Reihe gehört, in dem Verschwinden der sämtlichen Determinanten

$$\begin{aligned} & D_{\alpha\beta} \\ & D_{\alpha(\beta)\gamma}, \quad D_{\beta\gamma} \\ & \dots \dots \dots \\ & D_{\alpha(\beta\dots\mu)\nu}, \quad D_{\beta(\gamma\dots\mu)\nu}, \dots, \quad D_{\mu\nu} \end{aligned}$$

17. Anwendung auf reguläre Stellen. Im Artikel 9 haben wir gesehen, dass die zu einer regulären Stelle gehörige determinierende Gleichung die Wurzeln

$$0, 1, \dots, n-1$$

hat. Alle n Wurzeln bilden somit eine einzige Gruppe; zu jeder derselben gehört aber eine Reihe.

Bilden wir nämlich das Gleichungssystem S des Artikel 12, indem wir für α die kleinste Wurzel 0 der Gruppe einsetzen, so lautet dasselbe

$$(15) \quad \begin{cases} 0 = a_{10}c_0 + a_{11}c_1 \\ 0 = a_{20}c_0 + a_{21}c_1 + a_{22}c_2 \\ \dots \dots \dots \\ 0 = a_{n-1,0}c_0 + a_{n-1,1}c_1 + a_{n-1,2}c_2 + \dots + a_{n-1,n-1}c_{n-1} \end{cases}$$

Da nun, wie wir schon im Artikel 9 hervorgehoben haben,

$$\begin{aligned} \alpha_{kk} & \text{ durch } k(k-1) \dots (k-n+1) \\ \alpha_{k,k-1} & \text{ „ } (k-1) \dots (k-n+1) \\ & \dots \dots \dots \\ \alpha_{k,k-n+1} & \text{ durch } (k-n+1) \end{aligned}$$

teilbar ist, so sind die sämtlichen Coefficienten α_{ks} im System (15) $= 0$, d. h. c_0, c_1, \dots, c_{n-1} bleiben willkürlich:

1) Mit diesem Resultat kann man z. B. die zuerst von Fuchs (Crelles Journ. Bd. 68. (1868) S. 375—378) aufgestellten Bedingungen für die gleiche Frage, sowie die von Frobenius (Crelles Journ. Bd. 76 (1873) S. 224—226) vergleichen. Zu der letzteren Vergleichung siehe auch des Verfassers Hab.-Schrift S. 31. 32. — Der hier erst lernende Leser wird allerdings vielleicht jetzt noch nicht die Identität der dort und hier behandelten Fragen erkennen können.

Bei einer regulären Stelle gehört zu jeder Wurzel der Gruppe 0, 1, ..., $n - 1$ eine Reihe oder — mit anderen Worten — gehört zu 0 eine Reihe, deren n erste Coefficienten willkürlich bleiben, während alle folgenden sich linear und homogen durch diese ausdrücken.

18. Weitere Beispiele.

1. Beispiel: Bei dem in Artikel 10 als erstes behandeltem Beispiel $x^{n-q} \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-q-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{P}_{n-q} y^{(q)} + \dots + \mathfrak{P}_n y = 0$ besass die determinierende Gleichung u. a. die Wurzeln

$$0, 1, \dots, q - 1.$$

Wir wollen nun voraussetzen, dass unter den $n - q$ übrigen Wurzeln keine vorkomme, die gleich einer ganzen Zahl $> q - 1$ ist.

Dann folgt aus einer schon im Artikel 10 gemachten Bemerkung über die Grössen $a_{kk}, a_{k, k-1}, \dots, a_{k, k-q+1}$ gerade wie im vorangehenden Artikel bei einer regulären Stelle, dass zu jeder der Wurzeln 0, 1, ..., $q - 1$ eine Reihe gehört.

2. Beispiel: Die Gauss'sche Differentialgleichung

$$x(x-1)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta \cdot y = 0$$

(s. Art. 10) hat bei $x = 0, 1$ und $1 - \gamma$ als Wurzeln der determinierenden Gleichung, welche eine Gruppe bilden, wenn γ ganzzahlig oder $= 0$ ist.

a) γ sei eine negative ganze Zahl oder Null. Dann ist $1 - \gamma$ die grössere der beiden Wurzeln, zu der also immer eine Reihe gehört. Es fragt sich, unter welchen Bedingungen auch zu der Wurzel 0 eine solche gehört.

Da die Recursionsformel

$$a_{k+1}c_{k+1} + a_{kk}c_k - (k + \alpha + 1)(k + \beta + 1)c_{k-1} - k(k + \gamma - 1)c_k = 0,$$

lautet, so wird das System S hier

$$0 = a_{10}c_0 + a_{11}c_1$$

$$0 = a_{21}c_1 + a_{22}c_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$0 = a_{\gamma+1, \gamma}c_{\gamma-1} + a_{\gamma+1, \gamma}c_{\gamma}$$

$$0 = a_{1-\gamma, -\gamma}c_{-\gamma}$$

und die Determinante $D_{0, 1-\gamma}$, deren Verschwinden hier allein notwendig und hinreichend ist, wird

$$a_{10} \cdot a_{21} \dots a_{1-\gamma, -\gamma} = \alpha\beta(\alpha + 1)(\beta + 1) \dots (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma).$$

Damit dieser Ausdruck verschwindet, muss also α oder β einen der Werte haben 0, $-1, -2, \dots, \gamma$.

Kapitel III.

Nachweis der Reihenconvergenz bei einer Stelle der Bestimmtheit¹⁾.

19. Begründung der Beschränkung auf Stellen der Bestimmtheit; vereinfachende Annahmen. Nachdem im vorigen Kapitel festgestellt worden ist, unter welchen Bedingungen zu einer beliebigen Wurzel α der zu dem Punkt $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung eine Reihe gehört, in dem Sinne, dass die Coefficienten einer wirklich mit x^α , nicht erst mit einer höheren Potenz, beginnenden Reihe bis in's Unendliche sich so berechnen lassen, dass die Differentialgleichung durch dieselbe identisch erfüllt wird, tritt nun die Frage auf, *ob diese Reihe convergirt*. Erst dann stellt dieselbe ja eine Function von x , und da diese die Differentialgleichung befriedigt, ein *Integral* dar.

Zunächst ist leicht zu zeigen, dass, *wenn $x = 0$ eine Stelle der Unbestimmtheit ist, die Reihe im Allgemeinen nicht convergiren kann*. In diesem Fall ist nämlich in der Recursionsformel

$$P_{k\alpha} = a_{k\alpha}c_\alpha + a_{k\alpha-1}c_{\alpha-1} + \dots + a_{k\alpha-1}c_{\alpha-1} + a_{k\alpha}c_k = 0$$

$a_{k\alpha}$ in k von niedrigerem Grad als n , während mindestens eine der Grössen $a_{k\alpha-1}, a_{k\alpha-2}, \dots$, wie aus Formel (7) Artikel 6 folgt, vom n^{ten} Grad in k ist. Bildet man daher c_k aus der Recursionsformel, so ist dies eine lineare Function der vorhergehenden c mit Coefficienten, welche mit wachsendem k ihrem absoluten Betrag nach zum Teil unendlich werden. Infolge dessen wird *im Allgemeinen* — wenn nicht besondere Beziehungen eintreten — $|c_k|$ mit unendlich wachsendem $|k|$ selbst unendlich werden, wodurch die Convergenz ausgeschlossen ist. Welcher Art solche Beziehungen sein müssen, werden wir später erkennen, wenn wir dem Fall, dass eine determinierende Gleichung bei $x = 0$ zwar existiert, aber nicht von Grad n ist (im Kap. XIII) eine eingehende Betrachtung widmen.

1) Dieser Convergenzbeweis ist abgesehen von unwesentlichen Aenderungen, welche wegen des weitergehenden Beweisgegenstandes nötig waren oder zur Vereinfachung dienen sollten, der von Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. (1866). S. 148 bis 152.

weil zufolge unserer jetzigen Annahme $\mathfrak{P}_n(0)$ gleich Null ist. Die Zahlen $\beta, \gamma, \dots, \nu$ des Kap. II aber sind jetzt positive ganze Zahlen.

Es ist daher nun zu beweisen, dass die Reihe

$$(4) \quad \eta = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k x^k,$$

deren Coefficienten nach der Recursionsformel

$$(5) \quad \alpha_{k0} c_0 + \alpha_{k1} c_1 + \dots + \alpha_{k,k-1} c_{k-1} + \alpha_{kk} c_k = 0$$

gebildet sind, wobei c_0 willkürlich bleibt, alle andern c aber, wenn wir uns die willkürlich bleibenden gleich Null gesetzt denken, Multipla von c_0 sind, in einem Kreis um den Punkt $x=0$ mit von Null verschiedenem Radius convergirt.

20. Hilfsdifferentialgleichung und Hilfsreihe. Zu dem Ende setzen wir (1), nachdem der wegen des Verschwindens von $\mathfrak{P}_n(0)$ allen Coefficienten gemeinsame Faktor x weggelassen ist, in die Gestalt

$$(6) \quad x^{n-1} y^{(n)} + x^{n-2} \mathfrak{P}_1(0) y^{(n-1)} + x^{n-3} \mathfrak{P}_2(0) y^{(n-2)} + \dots + \mathfrak{P}_{n-1}(0) y' \\ = x^{n-1} \frac{\mathfrak{P}_1(0) - \mathfrak{P}_1(x)}{x} y^{(n-1)} + \dots + x \frac{\mathfrak{P}_{n-1}(0) - \mathfrak{P}_{n-1}(x)}{x} y' - \frac{\mathfrak{P}_n(x)}{x} y.$$

Hier sind nämlich auf der linken Seite diejenigen Terme von den andern abgesondert, welche allein zur Bildung von $\alpha_{kk} c_k$ in der Recursionsformel (5) und nur zu diesem Glied beitragen, sodass also auf der rechten Seite die Terme stehen, aus denen der Rest der Recursionsformel mit entgegengesetztem Zeichen entsteht

$$-\alpha_{k0} c_0 - \alpha_{k1} c_1 - \dots - \alpha_{k,k-1} c_{k-1}.$$

Nach den einleitenden Erörterungen sind nun die $\mathfrak{P}_1(x), \mathfrak{P}_2(x), \dots, \mathfrak{P}_n(x)$ gleichzeitig convergent in der sogenannten Umgebung von $x=0$, d. h. im Innern eines Kreises um den Punkt $x=0$, der sich bis zum nächstliegenden singulären Punkt erstreckt, wenn also diese Entfernung mit r bezeichnet wird — im Innern des Kreises mit dem Radius r und $x=0$. Das Gleiche gilt also von den Reihen

$$(7) \quad \frac{\mathfrak{P}_1(x) - \mathfrak{P}_1(0)}{x}, \quad \frac{\mathfrak{P}_2(x) - \mathfrak{P}_2(0)}{x}, \dots, \frac{\mathfrak{P}_n(x)}{x},$$

und der absolute Betrag von jeder derselben sei im Innern dieses Kreises bzw. kleiner als die positiven Zahlen

$$M_1, M_2, \dots, M_n.$$

Ferner sei γ ein beliebiger positiver echter Bruch und die Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ bestimmt durch die Identität

$$(8) \quad \gamma k^n = \gamma k(k-1) \dots (k-n+1) + \gamma_1 k \dots (k-n+2) + \dots + \gamma_{n-1} \cdot k.$$

positiv wählt. In (5^a) nämlich ist für alle vorkommenden Werte von k , d. h. für $k = 1, 2 \dots$, rechts $\gamma \cdot k^n$ positiv und links alle b_{k0} , $b_{k1}, \dots, b_{k, k-1}$ als Summen von Produkten aus positiven Zahlen (nämlich den Zahlen $k(k-1) \dots (k-l+1)$ u. s. w. und den Coefficienten der Reihen (7^a)) ebenfalls positiv. Setzt man also

$$g_k = \mathfrak{B}_k \cdot g_0,$$

so ist hiernach \mathfrak{B}_k stets positiv, folglich alle g_k desgleichen, sobald g_0 positiv genommen wird.

Um nun die Convergenz der Reihe (4^a) darzuthun, kann man für diese noch eine von (5^a) verschiedene, nur zwei auf einander folgende Coefficienten enthaltende Recursionsformel aufstellen. Multipliciert man nämlich zunächst (6^a) mit $1 - \frac{x}{r}$, substituirt für u die Reihe (4^a) und bestimmt auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{k-1} , so folgt unter Berücksichtigung von (8) und der aus (8) durch Vertauschung von k mit $k-1$ hervorgehenden Gleichung die Formel

$$(5^{a'}) \quad g_k \cdot \gamma k^n = g_{k-1} \left[\frac{\gamma}{r} (k-1)^n + M_1 (k-1) \dots (k-n+1) + \dots + M_n \right].$$

Es ist also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g_k}{g_{k-1}} = \frac{1}{r}.$$

Mithin nähert sich der absolute Betrag des Gliederquotienten der Reihe (4^a) dem Wert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g_k}{g_{k-1}} \cdot |x| = \frac{|x|}{r},$$

also einer Grenze, die < 1 , wenn $|x| < r$; d. h. die Reihe (4^a) *convergiert im Innern des Kreises mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $x = 0$, also in demselben Kreis, in dem auch die sämtlichen Coefficienten convergieren, in der ganzen Umgebung von $x = 0$.*

22. Convergenz der vorgelagerten Reihe. Die Beschaffenheit der eingeführten Hilffsgleichung und der aus ihr entspringenden Reihe (4^a) ist ferner derart, dass jeder Coefficient der letzteren grösser ist als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten von (4), wenn die positive Zahl g_0 noch entsprechend bestimmt wird, d. h. dass unter dieser Voraussetzung für alle Werte von k

$$g_k > |c_k|$$

ist.

Zum Beweise dieser Behauptung bedürfen wir des functionentheoretischen Satzes¹⁾: „Wenn der absolute Betrag einer gewöhnlichen Potenzreihe im Innern ihres Convergenzkreises mit dem Radius r stets kleiner als die positive Zahl M ist, so ist für jeden Wert der Zahl n der Coefficient der n^{ten} Potenz in der Reihe absolut genommen kleiner als

$$\frac{M}{r^n}.$$

Wenden wir diesen Satz auf die Reihen (7) an und erinnern uns der Definition der Zahlen M_1, M_2, \dots, M_n , welche in den Reihen (7^a) auftreten, so haben wir zunächst das Resultat, dass die absoluten Beträge der Coefficienten der Reihen (7) bezw. kleiner sind als die entsprechenden Coefficienten der Reihen (7^a). Daraus folgt aber in Anbetracht der Bildung der Grössen a_{ks} und b_{ks} und, wenn noch der Satz in Anwendung kommt, dass der Modul einer Summe höchstens ebenso gross ist als die Summe der Moduln,

$$|a_{ks}| < b_{ks} \quad \text{für } \left\{ \begin{matrix} k=1, 2, 3, \dots \\ s=0, 1, \dots, k-1 \end{matrix} \right\}.$$

Wäre also bis zu irgend einem Wert von k hin das Bestehen der Ungleichung

$$(9) \quad |c_{k-1}| < g_{k-1}$$

bereits erwiesen, so hätte man dann auch

$$|a_{k0}c_0 + a_{k1}c_1 + \dots + a_{k,k-1}c_{k-1}| < b_{k0}g_0 + b_{k1}g_1 + \dots + b_{k,k-1}g_{k-1},$$

also nach (5) und (5^a)

$$|a_{kk}c_k| < \gamma^k g_k$$

und folglich, wenn von demselben Wert von k an noch für alle Werte von k

$$(10) \quad |a_{kk}| > \gamma^k$$

wäre, so würde Ungleichung (9) auch für den nächst grösseren Wert von k gelten und weiter für alle Werte von k .

Nun ist aber, da γ ein positiver echter Bruch und nach einem bekannten Satz der Algebra²⁾ für ein hinreichend grosses k die ganze rationale Function a_{kk} sich von ihrem höchsten Gliede k^a beliebig wenig unterscheidet, (10) von einem bestimmten endlichen Wert von k , etwa von $k = t$ an, erfüllt. Folglich braucht nur noch gezeigt zu

1) Vergl. Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionentheorie, Berlin, 1886, S. 93. 94.

2) Vergl. z. B. Serret, Cours d'Algèbre supérieure, 4^{me} ed., Paris 1877. tom. I. S. 93.

werden, dass (9) durch Wahl von g_0 für $k = 1, 2, \dots, t$ erfüllt werden kann. Es ist

$$c_k \equiv \mathfrak{A}_k \cdot c_0, \quad g_k \equiv \mathfrak{B}_k \cdot g_0,$$

worin die \mathfrak{A}_k und \mathfrak{B}_k ganz bestimmte Grössen, die \mathfrak{B}_k speziell positiv, c_0 völlig willkürlich und g_0 nur der Beschränkung, positiv zu sein, unterworfen ist. Sei daher unter den Zahlen

$$1, |\mathfrak{A}_1|, |\mathfrak{A}_2|, \dots, |\mathfrak{A}_{t-1}| \quad \mathfrak{A} \text{ die grösste}$$

und unter den Zahlen

$$1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_{t-1} \quad \mathfrak{B} \text{ die kleinste}$$

und dann g_0 gemäss der stets erfüllbaren Bedingung bestimmt

$$\mathfrak{A} |c_0| < \mathfrak{B} \cdot g_0,$$

so besteht (9) offenbar für alle Werte von k , die $< t$ sind.

Damit ist die zu Anfang dieses Artikels aufgestellte Behauptung

$$g_k > |c_k|$$

für alle Werte von k und folglich die Convergenz der Reihe (4) in demselben Kreis wie die von (4ⁿ) erwiesen.

Wir können daher das Resultat dieses Kapitels folgendermassen aussprechen:

Wenn $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit ist, so convergiert eine jede Reihe, die sich daselbst bestimmt verhält und der Differentialgleichung formal genügt, d. h. deren Coefficienten aus der Recursionsformel berechnet werden, in der ganzen Umgebung des Punktes $x = 0$ oder im Innern des Kreises um $x = 0$ als Mittelpunkt, der durch den nächsten singulären Punkt hindurchgeht.

Hiernit ist aber der Nachweis der Existenz von Integralen unserer Differentialgleichung erbracht. Denn da die regulären Stellen derselben ja Stellen der Bestimmtheit sind, so besitzen wir nunmehr bei jeder regulären Stelle n Integrale in Reihenform, welche bezw. mit der 0^{ten}, 1^{ten}, ..., $n - 1$ ^{ten} Potenz beginnen.

Das Hauptergebnis der ganzen bisherigen Untersuchung können wir daher in dem Satz zusammenfassen, der die Grundlage für alles Folgende bildet:

Bei jeder regulären Stelle $x = a$ besitzt die Differentialgleichung n Integrale in Gestalt gewöhnlicher Potenzreihen von $x - a$, die bezw. mit der 0^{ten}, 1^{ten}, ..., $n - 1$ ^{ten} Potenz von $x - a$ beginnen.

23. Beispiele. Ausser durch die Integrale bei einer regulären Stelle wollen wir die Convergenzuntersuchung dieses Kapitels noch durch einige andere Beispiele illustrieren.

1. *Beispiel*: die Gauss'sche Differentialgleichung

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0$$

(s. Art. 10) hatte bei $x=0$ eine Stelle der Bestimmtheit, deren Umgebung, da $x=1$ der einzige andere singuläre Punkt im Endlichen ist, der Kreis um $x=0$ mit dem Radius 1 ist. Die zugehörige Recursionsformel lautete

$$c_k \cdot k(k + \gamma - 1) = c_{k-1}(k + \alpha - 1)(k + \beta - 1).$$

Nehmen wir also an, dass zu der Wurzel $k=0$ der determinierenden Gleichung eine Reihe gehört, d. h. dass entweder γ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl oder aber, wenn jenes der Fall wäre, die im Artikel 18 aufgestellte Bedingung erfüllt sei, so können wir den willkürlichen Anfangscoefficienten der Reihe $c_0 = 1$ setzen und erhalten dann nach der Recursionsformel

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma}, \quad c_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}, \dots$$

Die mit diesen Coefficienten gebildete Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \dots$$

bezeichnet man nach Gauss durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x)$$

und nennt sie die *hypergeometrische Reihe* oder *Gauss'sche F-Reihe*. Nach dem Hauptsatz des gegenwärtigen Kapitels haben wir also in Verbindung mit den Bemerkungen des Artikel 18 das Resultat:

Die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ convergirt für beliebige Werte von α, β, γ im Innern des Kreises um $x=0$ mit dem Radius 1; nur wenn γ gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist, muss eine der Zahlen α, β einen der Werte $0, -1, -2, \dots, \gamma$ haben.

In der That sieht man ja aus der expliciten Gestalt der Reihe unmittelbar, dass in dem letztgenannten Fall die Coefficienten unendlich werden, wenn weder α noch β einen der angegebenen Werte hat.

Gehört auch zu $1-\gamma$ eine Reihe (s. Artikel 18) und setzt man wieder deren ersten Coefficienten $= 1$, so zeigt die Recursionsformel, dass diese Reihe lautet

$$x^{1-\gamma} \cdot F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x),$$

deren Convergenzbedingungen entweder wieder wie vorher aus dem Satz im vorigen Artikel und aus Artikel 18 oder aber unmittelbar aus den oben schon aufgestellten Convergenzbedingungen der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ abzulesen sind.

Dieselbe Differentialgleichung hat auch bei $x = 1$ (s. Art. 10) eine Stelle der Bestimmtheit, deren Umgebung der Kreis um $x = 1$ mit dem Radius 1 ist. Die Recursionsformel lautet hier

$$c_k k(k + \alpha + \beta - \gamma) + c_{k-1}(k + \alpha - 1)(k + \beta - 1) = 0.$$

Gehört daher zu den Wurzeln 0 und $\gamma - \alpha - \beta$ der determinierenden Gleichung eine Reihe, was wie in Art. 18 zu entscheiden ist, so lauten diese Reihen (bei denen wir das Argument $1 - x$ statt $x - 1$ nennen, damit alle Glieder gleiches Vorzeichen haben)

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - x)$$

und

$$(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - x),$$

deren Convergenzbedingungen sich wieder aus denen für $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ direct ablesen lassen.

2. Beispiel: Die Differentialgleichung

$$(11) \quad x^3 y'' + xy' - x(1 + x^2)y = 0$$

liefert bei der ausserwesentlich singulären Stelle $x = 0$ die Recursionsformel

$$(12) \quad F_{k\alpha} \quad k c_k + [(k-1)(k-2) - 1] c_{k-1} - c_{k-3} = 0.$$

Die determinierende Gleichung ($k=0$) ist von niedrigerem Grad als die Ordnung der Differentialgleichung; also ist $x=0$ Stelle der Unbestimmtheit; trotzdem convergiert hier die zu Null gehörige Reihe. Es ist nämlich

$$(13) \quad F_{k\alpha} \quad k c_k - c_{k-1} + (k-2)[(k-1)c_{k-1} - c_{k-3}] \\ + (k-2)c_{k-2} - c_{k-3}.$$

Folglich ist die Recursionsformel (12) für alle Werte von k ($k=0, 1, 2, \dots$) erfüllt, wenn für dieselben Werte die einfachere Recursionsformel

$$(14) \quad G_{k\alpha} \quad k c_k - c_{k-1} = 0$$

erfüllt ist. Setzt man aber das erste, willkürlich bleibende $c_0 = 1$, so giebt (14) die Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x,$$

welche convergiert und — wie man sich leicht überzeugt — in der That der Gleichung (11) genügt.

Gleichung (11) giebt also ein Beispiel dafür, dass auch bei einer Stelle der Unbestimmtheit, wenn daselbst eine determinierende Gleichung überhaupt existiert, die zugehörige Reihe convergieren kann.

3. Beispiel:

$$x^3 y'' + x(2x - 1)y' + y = 0$$

liefert bei der ausserwesentlich singulären Stelle der Unbestimmtheit $x = 0$ die Recursionsformel

$$F_{k\alpha} \equiv k(k-1)c_{k-1} - (k-1)c_k = 0,$$

wo wir beiläufig bemerken, dass

$$F_{k\alpha} \equiv (k-1)G_{k\alpha},$$

wenn

$$G_{k\alpha} \equiv k c_{k-1} - c_k$$

gesetzt wird.

Die determinierende Gleichung hat die Wurzel 1; daher erhalten wir aus der Recursionsformel die Reihe

$$y \equiv c_1[1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots],$$

welche der Differentialgleichung genügt, aber für jeden noch so kleinen Wert von x divergiert.

Die beiden letzten Beispiele zeigen also einstweilen, dass bei einer Stelle der Unbestimmtheit, wenn die determinierende Function nicht eine Constante, d. h. von k unabhängig ist, sowohl eine convergente, sich bestimmt verhaltende Reihe existieren, als auch das Gegenteil der Fall sein kann.

Kapitel IV.

Fundamentalsystem von Integralen. Nicht homogene Differentialgleichungen.

24. Feststellung der nächsten Aufgaben. Der im vorigen Kapitel als Hauptresultat der bisherigen Untersuchung gewonnene Satz kann füglich als *Fundamentalsatz* unserer ganzen Theorie bezeichnet werden, weil er die Existenz von Integralen begründet. Er zieht zugleich eine Trennungslinie zwischen den Stellen der Bestimmtheit und denen der Unbestimmtheit: bei den ersteren *convergiert* jede formal der Differentialgleichung genügende Reihe, bei den letzteren existiert *im Allgemeinen keine sich bestimmt verhaltende convergente Reihe, welche der Differentialgleichung genügt*. Hiernach wird sich auch die weitere Untersuchung des Verhaltens der Integrale in der Umgebung der einzelnen Stellen spalten und sich zunächst denen der ersten Art zuwenden müssen. Ja, die Kenntnis der Integrale in der Umgebung der Stellen der Bestimmtheit — speziell der regulären Stellen — wird uns überhaupt erst die Mittel liefern, um das Verhalten der Integrale auch bei Stellen der Unbestimmtheit untersuchen zu können.

Ist hiermit der Plan für den Fortgang der Untersuchung in grossen Zügen gekennzeichnet, so lässt der Fundamentalsatz doch zunächst noch die Erledigung einer andern Frage wünschen. Derselbe lieferte uns ja bei einer Stelle der Bestimmtheit mindestens eines und höchstens n Integrale, — wenn man aber berücksichtigt, dass jedes dieser Integrale noch eine willkürliche Constante (den ersten Coefficienten) enthält, — sogar unendlich viele Integrale. Um in dieser unendlichen Fülle eine Uebersicht zu gewinnen und zu erkennen, *in welcher Weise man sämtliche Integrale der Differentialgleichung umfassen kann*, müssen wir auf die Beziehungen eingehen, welche zwischen mehreren Integralen bestehen können.

25. Beziehungen von Integralen untereinander. Wir gehen dabei von einer für die linearen homogenen Differentialgleichungen charakteristischen Eigenschaft aus. Sei nämlich

$$(1) \quad P(x, y) \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0$$

(indem wir uns jetzt die ganze Gleichung durch den Coefficienten von $y^{(n)}$ dividiert denken)¹⁾ eine lineare homogene Differentialgleichung mit ganz beliebigen Coefficienten und seien

$$y_1, y_2, \dots, y_\lambda$$

Integrale derselben, so ist auch

$$\eta \equiv c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_\lambda y_\lambda$$

ein Integral, wenn $c_1, c_2, \dots, c_\lambda$ beliebige, von x unabhängige Grössen sind. Denn, setzt man diesen Ausdruck für y in (1) ein, so wird

$$P(x, \eta) \equiv c_1 P(x, y_1) + c_2 P(x, y_2) + \dots + c_\lambda P(x, y_\lambda) = 0,$$

weil nach Voraussetzung

$$P(x, y_1) \equiv P(x, y_2) \equiv \dots \equiv P(x, y_\lambda) = 0.$$

Man wird deshalb, wenn $y_{\lambda+1}$ wieder ein Integral von (1) ist, sich aber linear und homogen durch $y_1 y_2 \dots y_\lambda$ mit von x unabhängigen Coefficienten ausdrücken lässt, dieses Integral nicht als wesentlich von jenen verschieden betrachten können. Man wird überhaupt λ Integrale

$$y_1 y_2 \dots y_\lambda$$

dann und nur dann als untereinander wesentlich verschieden bezeichnen, wenn zwischen ihnen keine lineare homogene Relation mit von x unabhängigen Coefficienten

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_\lambda y_\lambda = 0$$

besteht, oder wenn dieselben — wie man sich dafür kurz ausdrückt — linear unabhängig sind.

Über linear von einander unabhängige Functionen existiert nun folgender, vielfach von uns zu benutzender Satz:

Sind

$$u_1 \ u_2 \ \dots \ u_\lambda$$

irgend welche λ Functionen der Variablen x , so ist die aus diesen und ihren $\lambda - 1$ ersten Ableitungen gebildete Determinante

1) Wenn es sich um Aufstellung von Formeln handelt, welche in speziellen Fällen zur praktischen Anwendung gelangen können, benutzen wir immer die allgemeinere Gestalt der Differentialgleichung (1) der Einleitung, wo noch nicht durch p_0 dividiert ist; so z. B. bei Ableitung der Recursionsformel in Kap. I. Handelt es sich dagegen um den Beweis theoretischer Sätze, so dient es oft zur Vereinfachung, wenn man die Differentialgleichung — wie hier — schon durch p_0 dividiert denkt.

fürten Satz nicht identisch Null. Folglich ergeben sich aus (2) für die Coefficienten p die Ausdrücke

$$(4) \quad p_1 = -\frac{D_1}{D}, \quad p_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad p_n = (-1)^n \frac{D_n}{D}.$$

Setzt man diese in $P(x, y)$ ein und multipliziert die ganze Gleichung (1) mit $(-1)^n D$, so nimmt die Differentialgleichung die Gestalt an

$$(-1)^n \{ y^{(n)} D - y^{(n-1)} D_1 + \dots + (-1)^n y D_n \} = 0$$

oder

$$(5) \quad \begin{vmatrix} y & y' & y'' & \dots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \dots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \dots & y_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n' & y_n'' & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir haben also das Resultat:

Sind y_1, y_2, \dots, y_n n linear unabhängige Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung (1), so kann man deren Coefficienten in der Form (4) durch diese Integrale ausdrücken oder — was dasselbe ist — die ganze Differentialgleichung nach Multiplication mit der Determinante der n Integrale in die Determinantenform (5) setzen.

27. Fundamentalsystem von Integralen. Da man also aus n linear unabhängigen Integralen die Coefficienten der Differentialgleichung selbst berechnen kann, folgt, dass durch solche n Integrale jedes andere Integral der Differentialgleichung bestimmt sein muss. Wir wollen deshalb sagen:

n linear unabhängige Integrale oder — w. d. i. — n Integrale, deren Determinante nicht identisch Null ist, bilden ein Fundamentalsystem von Integralen. Die einzelnen Integrale y_1, y_2, \dots, y_n sollen die Elemente, D die Determinante des Fundamentalsystems heissen.

Die Gestalt (5) der Differentialgleichung zeigt unmittelbar, dass dieselbe identisch erfüllt wird, wenn man $y = y_1, y_2, \dots, y_n$ oder gleich einer beliebigen linearen homogenen Verbindung derselben mit von x unabhängigen Coefficienten setzt. Sie zeigt aber auch umgekehrt, dass jedes Integral der Differentialgleichung (1) linear und homogen mit von x unabhängigen Coefficienten durch y_1, y_2, \dots, y_n ausdrückbar ist. Bedeutet nämlich y irgend ein Integral der Differentialgleichung, so folgt nach (5) und dem in Art. 25 angeführten Satz das Bestehen einer Relation

$$Cy + C_1 y_1 + \dots + C_n y_n = 0$$

mit von x unabhängigen Coefficienten. Da aber $y_1 y_2 \dots y_n$ linear unabhängig sind, kann C nicht Null sein, und die ausgesprochene Behauptung ist erwiesen. Hiermit ist aber die Bezeichnung von n linear unabhängigen Integralen als „Fundamentalsystem von Integralen“ in vollstem Masse begründet.

Eine lineare homogene Verbindung der n Elemente eines Fundamentalsystems mit *willkürlichen*, von x unabhängigen Coefficienten

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

nennt man deshalb *das allgemeine Integral der Differentialgleichung*, weil nach dem Vorstehenden *jedes* Integral durch Specialisierung der $c_1 c_2 \dots c_n$ daraus hervorgeht oder in jenem Ausdruck enthalten ist. Im Gegensatz dazu nennt man jedes Integral, das weniger als n willkürliche Constanten enthält, *ein partikuläres Integral* oder *eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung*.

Gleichzeitig ergibt sich aus den obigen Bemerkungen der Satz:

Zwischen $n + 1$ Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung besteht immer eine lineare Abhängigkeit. Denn, wenn es unter den $n + 1$ Integralen ein Fundamentalsystem giebt, so ist das $(n + 1)^{\text{te}}$ Integral durch dessen Elemente ausdrückbar; andernfalls sind schon je n der $n + 1$ Integrale linear abhängig.

Da es nach diesem Satz also eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, welche mehr als n linear unabhängige Lösungen besitzt, nicht giebt, kann man auch die Folgerung aussprechen:

Weiss man, dass eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von mehr als n linear unabhängigen Functionen erfüllt wird, so folgt daraus, dass sämtliche Coefficienten der Differentialgleichung (bevor noch durch den Coefficienten von $y^{(n)}$ dividiert ist) $\equiv 0$ sein müssen.

Wie dieser Satz an eine bekannte Eigenschaft der *algebraischen Gleichungen* erinnert, so bildet die Gestalt (5) der Differentialgleichung das Analogon zu der Zerlegung des Polynoms einer algebraischen Gleichung in Linearfactoren, wenn man die Wurzeln $x_1 x_2 \dots x_n$ kennt,

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0.$$

Und wie bei der algebraischen Gleichung

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots \pm a_n = 0$$

die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x symmetrische Functionen der Wurzeln $x_1 x_2 \dots x_n$ sind, so zeigen hier die Gleichungen (4), dass die Coefficienten der verschiedenen Ableitungen von y in der linearen homogenen Differentialgleichung (1) symmetrische Functionen

der Elemente eines Fundamentalsystems sind, da D, D_1, \dots, D_n bei Vertauschung von y_i und y_k nur das Zeichen ändern. Dies ist natürlich so zu verstehen, dass man mit der Vertauschung von y_i und y_k gleichzeitig die Vertauschung von $y_i^{(\lambda)}$ und $y_k^{(\lambda)}$ ($\lambda=1, 2, \dots, n$) vornimmt. Man kann sogar zu dem Satz der Algebra, dass jede rationale symmetrische Function der Wurzeln eine rationale Function der Coefficienten ist, hier ein Analogon ableiten. Doch soll auf diese mehr formalen Eigenschaften jetzt nicht weiter eingegangen werden.

Der Hauptinhalt dieses Artikels besteht also in der

Definition des Fundamentalsystems und des allgemeinen Integrals und in dem Satz:

Jedes Integral ist linear und homogen mit von x unabhängigen Coefficienten durch die Elemente eines Fundamentalsystems ausdrückbar.

28. Die Determinante eines Fundamentalsystems. Die Determinante eines Fundamentalsystems verschwindet nach der Definition nicht identisch. Wir können aber mittelst der im Artikel 26 gewonnenen Resultate einen Ausdruck für D ableiten, welcher noch weiteren Aufschluss über die Natur dieser Determinante giebt.

Man differenziert nämlich D nach x , indem man die Summe der n Determinanten bildet, welche aus D entstehen, wenn jedesmal die Elemente einer anderen der n Columnen nach x differenziert werden.¹⁾ Von diesen Determinanten verschwinden aber wegen Uebereinstimmung zweier Columnen alle bis auf die letzte, welche D_1 ist. Man hat also

$$(3') \quad \frac{dD}{dx} = D_1$$

und daher nach (4)

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dx} = \frac{d}{dx} \log D = p_1$$

oder durch Integration

$$(6) \quad D = Ce^{-\int p_1 dx}$$

wo C eine von Null verschiedene Constante ist, weil sonst $D = 0$ wäre. Diese Gleichung lehrt nun zufolge der Eigenschaft der Exponentialfunction, die den Wert Null nur für unendlich grosse Werte des Argumentes annehmen kann, dass D_n nur für solche Werte von x verschwinden kann, für welche $\int p_1 dx$ unendlich wird. Da aber p_1 für einen regulären¹⁾ Wert $x = a$ nicht unendlich wird, so kann D

1) Vergl. Baltzer, Theorie u. Anwend. d. Det. 5. Aufl. Leipzig 1881. § 3. 15. S. 29 ff.

nur an singulären Stellen der Differentialgleichung verschwinden. Wir haben daher das Resultat:

Die Determinante eines Fundamentalsystems kann nur an singulären Stellen der Differentialgleichung verschwinden und zwar nur an solchen, wo speziell der Coefficient von $y^{(n-1)}$ — wenn der von $y^{(n)} = 1$ ist — unendlich wird.

Man kann übrigens die Differentialgleichung durch Einführung einer neuen abhängigen Variablen u statt y derart transformieren, dass für die neue Differentialgleichung die Determinante des Fundamentalsystems von x unabhängig und daher nach (3') und (4) der Coefficient der zweithöchsten Ableitung Null wird, was für manche Untersuchungen wünschenswert ist. Setzt man nämlich

$$(7) \quad y = e^{-\frac{1}{n} \int p_1 dx} \cdot u$$

oder, was dasselbe ist,

$$y = \sqrt[n]{D} \cdot u,$$

so ist

$$\begin{aligned} y' &= e^{-\frac{1}{n} \int p_1 dx} \left[u' - \frac{p_1}{n} u \right] \\ y'' &= e^{-\frac{1}{n} \int p_1 dx} \left[u'' - 2 \frac{p_1}{n} u' + \left(\frac{p_1^2}{n^2} - \frac{p_1'}{n} \right) u \right] \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n-1)} &= e^{-\frac{1}{n} \int p_1 dx} \left[u^{(n-1)} - \frac{n-1}{n} p_1 u^{(n-2)} + \dots \right] \\ y^{(n)} &= e^{-\frac{1}{n} \int p_1 dx} \left[u^{(n)} - p_1 u^{(n-1)} + \dots \dots \dots \right]. \end{aligned}$$

Also wird der Coefficient von $u^{(n-1)}$ in der neuen Differentialgleichung

$$e^{-\frac{1}{n} \int p_1 dx} [-p_1 + p_1] = 0,$$

und da der Faktor $e^{-\frac{1}{n} \int p_1 dx}$ allen Gliedern gemeinsam ist und weggelassen werden kann, erhält man für u eine Differentialgleichung

$$(8) \quad u^{(n)} + q_2 u^{(n-2)} + q_3 u^{(n-3)} + \dots + q_n u = 0,$$

wo die q_2, q_3, \dots, q_n ganze Functionen von p_1, p_2, \dots, p_n und den Ableitungen von p_1 sind. Da $q_1 = 0$ ist, ergibt sich für Differentialgleichung (8) die Determinante eines Fundamentalsystems nach (6) als eine Constante.

29. Erniedrigung der Ordnung der Differentialgleichung bei Kenntnis eines Integrals.

Wie man den Grad einer algebraischen Gleichung um 1 erniedrigen kann, wenn eine Wurzel derselben bekannt ist, so kann man von der linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(1^a) \quad P(x, y) \equiv p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0,$$

wenn man ein Integral $y = y_1$ besitzt, zu einer Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung übergehen.

Setzt man nämlich

$$(9) \quad y = y_1 \int z dx,$$

woraus folgt

$$(9^a) \quad z = \frac{d}{dx} \frac{y}{y_1},$$

so ist

$$y' = y_1' \int z dx + y_1 z$$

$$y'' = y_1'' \int z dx + 2y_1' z + y_1 z'$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} \int z dx + \binom{n}{1} y_1^{(n-1)} z + \binom{n}{2} y_1^{(n-2)} z' + \dots + y_1 z^{(n-1)},$$

und es wird

$$(10) \quad P(x, y_1 \int z dx) \equiv P(x, y_1) \int z dx + Q(x, z),$$

wo

$$(11) \quad \begin{aligned} Q(x, z) \equiv & z^{(n-1)} \cdot p_0 y_1 \\ & + z^{(n-2)} \left[\binom{n}{1} p_0 y_1' + p_1 y_1 \right] \\ & + z^{(n-3)} \left[\binom{n}{2} p_0 y_1'' + \binom{n-1}{1} p_1 y_1' + p_2 y_1 \right] \\ & + \dots \dots \dots \\ & + z \left[\binom{n}{1} p_0 y_1^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} p_1 y_1^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y_1 \right]. \end{aligned}$$

Da aber $P(x, y_1) \equiv 0$, so liefert der Ausdruck (9) für y ein Integral der Differentialgleichung (1^a) , falls z ein Integral der Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(12) \quad Q(x, z) = 0$$

ist.

Die Beziehung zwischen den Gleichungen (1^a) und (12) ist aber, wie man aus (10) sieht, in dem Sinne eine gegenseitige, dass wir sagen können:

Jedem Integral $z = \xi$ von (12) entspricht ein Integral $y = \eta$ von

(1^a), das durch (9) gegeben wird, und jedem Integral $y = \eta$ von (1^a) entspricht ein Integral $z = \xi$ von (12), das durch (9^a) gegeben wird. (Dem Integral $y = y_1$ von (1^a) entspricht das Integral $z = 0$ von (9)).

Ferner ist leicht zu zeigen, dass einem Fundamentalsystem der einen Gleichung auch ein solches der andern entspricht.

Sei nämlich $z_2 z_3 \dots z_n$ ein Fundamentalsystem von (12), $y_2 y_3 \dots y_n$ die (nach (9)) entsprechenden Integrale von (1^a), denen man als n^{tes} das Integral y_1 hinzufügt. Bestünde nun eine identische Relation

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \equiv 0$$

mit von x unabhängigen Coefficienten, so hätte man nach Division durch y_1 und Differentiation nach x

$$C_2 z_2 + \dots + C_n z_n \equiv 0$$

gegen die Voraussetzung.

Ist umgekehrt $y_1 y_2 \dots y_n$ ein Fundamentalsystem von (1^a) und sind $z_2 z_3 \dots z_n$ die nach (9^a) entsprechenden Integrale von (12), so ist auch eine Relation

$$C_2 z_2 + C_3 z_3 + \dots + C_n z_n \equiv 0$$

unmöglich, weil daraus durch Integration in Bezug auf x , wenn man die Integrationsconstante C_1 nennt, und durch Multiplication mit y_1 die Relation

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \equiv 0$$

folgen würde.

Wir können daher als Inhalt dieses Artikels aussprechen:

Ist ein Integral y_1 einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in y bekannt, so kann man mittelst der Transformationsgleichung

$$y = y_1 \int z dz \quad \left(z = \frac{d}{dx} \frac{y}{y_1} \right)$$

eine Differentialgleichung $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung in z herleiten, sodass jedem Fundamentalsystem der Differentialgleichung in z ein solches derjenigen in y (wenn man noch y_1 hinzufügt) entspricht und umgekehrt.

30. Fuchs'sche Methode ¹⁾ zur Gewinnung linear unabhängiger Integrale. Behält man nun von den Integralen von (12) nur eines, etwa z_2 , bei, so hat man also von (1^a) zwei Integrale

$$y_1, y_1 \int z_2 dx.$$

Substituiert man dann aber unter Wiederholung der Operation in (12)

$$(13) \quad z = z_2 \int t dx,$$

1) S. Crelles Journ. Bd. 66. (1866) p. 129 ff.

so erhält man für t eine Differentialgleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Ist $t = t_3$ ein Integral derselben, so ist

$$z_2 \int t_3 dx$$

ein Integral von (12) und folglich

$$y_1 \int z_2 dx \int t_3 dx$$

ein solches von (1^a).

So fortfahrend erhält man λ ($\lambda \leq n$) Integrale

$$(14) \quad y_1, y_1 \int z_2 dx, y_1 \int z_2 dx \int t_3 dx, \dots, y_1 \int z_2 dx \int \dots \int u_\lambda dx,$$

der Differentialgleichung (1^a), welche *linear unabhängig* sind.

Wäre nämlich identisch

$$(15) \quad c_1 y_1 + c_2 y_1 \int z_2 dx + \dots + c_\lambda y_1 \int z_2 dx \int \dots \int u_\lambda dx = 0,$$

so folgte hieraus durch Division durch y_1 und durch Differentiation nach x

$$c_2 z_2 + \dots + c_\lambda z_2 \int t_3 \dots \int u_\lambda dx = 0,$$

hieraus ebenso

$$c_3 t_3 + \dots + c_\lambda t_3 \int \dots \int u_\lambda dx = 0$$

u. s. w. endlich

$$c_\lambda u_\lambda = 0,$$

also $c_\lambda = 0$. Dann schliesst man ebenso, dass $c_{\lambda-1} = 0$, $c_{\lambda-2} = 0$, ... $c_1 = 0$, dass also eine Relation (15) unmöglich ist.

Damit ist die obige Behauptung erwiesen; für $\lambda = n$ bilden also die Integrale (14) ein Fundamentalsystem.

Zwischen den *Determinanten der Fundamentalsysteme* der bei dieser Ableitung benutzten Gleichungen in y, z, t, \dots , die wir mit

$$D, D', D'', \dots, D^{(n-1)}$$

bezeichnen, besteht noch eine bemerkenswerte Beziehung. Die letzte dieser Differentialgleichungen ist für $\lambda = n$ von der ersten Ordnung, ihre abhängige Variable heisse w ; ihr Integral w_n ist also zugleich die Determinante $D^{(n-1)}$ selbst.

Nun ist nach (6) für Gleichung (1^a)

$$D = C \cdot e^{-\int_{p_0}^{p_1} dx},$$

und für Gleichung (12) folgt ebenso nach (11)

$$D' = C' \cdot e^{-\int \left(n \frac{y_1'}{y_1} + \frac{p_1}{p_0} \right) dx},$$

also

$$(16) \quad D' = C_1 \cdot y_1^{-n} \cdot D.$$

Entsprechend ergibt sich

$$D'' = C_2 \cdot z_2^{-(n-1)} \cdot D'$$

u. s. w., wo die C immer Constanten bedeuten. Verbindet man alle diese Gleichungen, so erhält man für D , die Determinante eines Fundamentalsystems der Gleichung (1^a), den Ausdruck

$$(17) \quad D = C y_1^n \cdot z_2^{n-1} \cdot t_3^{n-2} \dots w_n.$$

Wir haben also das Resultat:

Kann man von jeder linearen homogenen Differentialgleichung ein Integral ermitteln, so kann man auch ein Fundamentalsystem für eine beliebige lineare homogene Differentialgleichung in der Gestalt (14) aufstellen. Die Determinante eines Fundamentalsystems drückt sich alsdann in der Form (17) durch die dabei benutzten Integrale y_1, z_2, \dots, w_n der Differentialgleichungen $n^{\text{ter}}, (n-1)^{\text{ter}}, \dots, 1^{\text{ter}}$ Ordnung aus, welche bei dem Verfahren der Reihe nach auftreten.

31. Zurückführung der Integration von nicht homogenen auf die Integration von homogenen linearen Differentialgleichungen¹⁾. Nach den Resultaten des gegenwärtigen Kapitels besteht die vollständige Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung in der Aufstellung eines Fundamentalsystems von Integralen. Angenommen nun, wir könnten für jede homogene Gleichung ein solches finden, so sind wir jetzt in der Lage, den in der Einleitung (Artikel 1) versprochenen Nachweis zu erbringen, dass die Integration von nicht homogenen linearen Gleichungen auf die von homogenen reducirt werden kann.

Sei nämlich

$$(18) \quad P(x, y) + p(x) \quad p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y + p = 0$$

die vorgelegte nicht homogene Differentialgleichung, so kann man daraus die homogene Differentialgleichung bilden

$$(19) \quad p \frac{d}{dx} (P + p) - (P + p) \frac{dp}{dx} = \frac{dP}{dx} p - P \frac{dp}{dx} = 0,$$

oder ausführlich geschrieben

$$(19^a) \quad \begin{aligned} y^{(n-1)} p p_0 + y^{(n)} (p p_0' + p p_1 - p_0 p') \\ + y^{(n-1)} (p p_1' + p p_2 - p_1 p') \\ + y^{(n-2)} (p p_2' + p p_3 - p_2 p') \\ + \dots \dots \dots \\ + y (p p_n' - p_n p') = 0, \end{aligned}$$

1) Vgl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 68. (1868) p. 368 ff.

welcher, wie aus der Form (19) ersichtlich, alle Integrale von (18) genügen. Umgekehrt ist aber nicht jedes Integral von (19) ein solches von (18); denn (19) wird ja durch alle Lösungen der sogenannten *reducierten Gleichung* $P = 0$ befriedigt, die offenbar nicht Integrale von (18) sind. Es kommt also darauf an, unter den Integralen von (19) diejenigen zu kennzeichnen, welche zugleich Lösungen von (18) sind.

Zu dem Ende dividieren wir die Gleichung (19) durch p^2 , sodass sie die Gestalt annimmt

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{P}{p} \right) = 0$$

oder nach einmaliger Integration in Bezug auf x

$$(20) \quad P = C.p,$$

wo C eine willkürliche, von x unabhängige Grösse bedeutet. Jedes Integral $y = \eta$ von (19) hat also die Eigenschaft, für y in $P(x, y)$ eingesetzt, diesem Ausdruck den Wert $C.p(x)$ zu erteilen. Setzt man nun ein ganz bestimmtes partikuläres Integral η ein (welches gar keine willkürliche Constante mehr enthält), so muss auch C eine ganz bestimmte Constante sein. Ist diese $= 0$, so hat man in η ein Integral der reducierten Gleichung

$$P(x, y) = 0;$$

ist $C \neq 0$, so ist

$$-\frac{\eta}{C} = \eta_1$$

ein Integral der nicht homogenen Gleichung (18). Denn setzt man $y = \eta_1$, so wird

$$P = -p \quad \text{oder} \quad P + p = 0.$$

Fügt man zu diesem Integral η_1 noch ein beliebiges Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$P(x, y) = 0$$

hinzu

$$y_1, y_2, \dots, y_n,$$

so hat man in

$$\eta_1, y_1, y_2, \dots, y_n$$

offenbar ein Fundamentalsystem der Gleichung (19); denn η_1 ist ja nicht Integral von $P = 0$ und infolge dessen nicht durch y_1, y_2, \dots, y_n ausdrückbar.

Mit diesem Fundamentalsystem umfasst man alle Integrale von (19), folglich, da hierunter alle Integrale von (18) begriffen sind, auch die letzteren sämtlich. Während aber das allgemeine Integral von (19) lautet

$$y = c\eta_1 + c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n,$$

wo c, c_1, c_2, \dots, c_n ganz willkürliche von x unabhängige Grössen sind, muss hierin, wenn (18) befriedigt werden soll, notwendig $c = 1$ sein. Das allgemeine Integral der nicht homogenen Gleichung (18) ist also

$$\eta_1 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

wo y_1, y_2, \dots, y_n ein Fundamentalsystem der reduzierten Gleichung $P=0$ und η_1 ein Integral der homogenen Gleichung (19) ist, das nicht zugleich eine Lösung von $P=0$ ist und dessen Constanten so bestimmt sind, dass $P(x, \eta_1) + p(x) = 0$ ist. Das Integral η_1 nennt man wegen seiner ausgezeichneten Stellung auch *Hauptintegral*.

Hiermit ist die Integration der nicht homogenen Gleichung in der That auf diejenige von homogenen Gleichungen zurückgeführt.

Nennen wir $\eta_1, y_1, y_2, \dots, y_n$ ein *Fundamentalsystem von Integralen der nicht homogenen Gleichung*

$$P(x, y) + p(x) = 0,$$

so kann man die Coefficienten dieser Gleichung ganz ähnlich wie in Artikel 26 durch die Elemente des Fundamentalsystems ausdrücken und der Gleichung selbst die Gestalt geben

$$(21) \quad \begin{vmatrix} 1 & y & y' & \dots & y^{(n)} \\ 1 & \eta_1 & \eta_1' & \dots & \eta_1^{(n)} \\ 0 & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n)} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Kapitel V.

Die Integrale bei einer regulären Stelle und die linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten.

32. Übersicht über den Fortgang der Untersuchung. Nach dem vorigen Kapitel beherrscht man alle Integrale der Differentialgleichung mit dem Besitz eines Fundamentalsystems. Um also das Verhalten sämtlicher Integrale in der Umgebung der einzelnen Werte von x kennen zu lernen, gilt es, für die Umgebung jeder der von uns unterschiedenen Arten von Stellen ein daselbst gültiges Fundamentalsystem aufzustellen oder doch — wo die explizite Aufstellung eines solchen sich als unmöglich erweisen sollte — zu ergründen, welche analytische Gestalt ein daselbst gültiges Fundamentalsystem haben muss.

Diese Aufgabe erledigen wir im gegenwärtigen Kapitel zunächst für die *regulären Stellen* und erhalten dabei zugleich mannigfache Anwendungen für die Untersuchungen des Kap. IV.

Besitzen wir aber alsdann für die Umgebung einer jeden regulären Stelle ein Fundamentalsystem von Integralen, so erhebt sich noch die Frage, welcher *Zusammenhang zwischen allen diesen unendlich vielen Fundamentalsystemen* besteht. Durch die Beantwortung derselben gewinnen wir erst den *Begriff* der für das ganze Gebiet der Differentialgleichung mit Ausnahme der singulären Stellen definierten *allgemeinen Integralfunction*. (Kap. VI.)

Indem wir darauf in den folgenden Kapiteln (VII, VIII, IX, X) ein für die Umgebung einer *beliebigen* Stelle der Bestimmtheit gültiges Fundamentalsystem aufstellen und untersuchen, lernen wir das *Verhalten der Integralfunction auch bei singulären Stellen der Bestimmtheit* kennen.

Kapitel XI und XII endlich stellen die analytische Gestalt der Integrale *in der Umgebung einer ganz beliebigen singulären Stelle*, also auch in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit, fest.

33. Verhalten der Integrale bei einer regulären Stelle. Wenn $x = 0$ eine reguläre Stelle der Differentialgleichung ist, so kann man letztere in die Form setzen

$$(1) \quad y^{(n)} + \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \mathfrak{P}_2 y^{(n-2)} + \dots + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von x sind. Obwohl nun die sämtlichen Wurzeln der zu $x=0$ gehörigen determinierenden Gleichung (s. Art. 9) nur eine einzige Gruppe bilden

$$0, 1, \dots, n-1,$$

gehört dennoch nach Artikel 17 zu jeder derselben eine Reihe oder, wie wir nun auf Grund von Kap. III sagen dürfen, ein Integral in Reihenform. Bezeichnen wir diese n Integrale bezw. mit

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

und denken uns bei jedem derselben ausser dem willkürlichen Anfangscoefficienten alle andern willkürlich bleibenden Coefficienten (s. Art. 15) gleich Null gesetzt, so bilden y_1, y_2, \dots, y_n ein *Fundamentalsystem von Integralen*; denn ihre Zahl ist n , und eine lineare homogene Relation zwischen ihnen ist ausgeschlossen¹⁾.

Betrachtet man statt dieses Fundamentalsystems das allgemeine Integral

$$(2) \quad \eta = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = \sum_{k=1}^n C_k x^k$$

wo C_1, C_2, \dots, C_n willkürliche von x unabhängige Grössen sind, so ist dies eine gewöhnliche Potenzreihe von x , deren n erste Coefficienten willkürlich sind. Da aber die Coefficienten dieser Potenzreihe nach dem Taylor'schen Satz die Bedeutung haben

$$C_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k \eta}{dx^k} \right)_{x=0},$$

so kann man auch sagen: *das allgemeine Integral der Differentialgleichung in der Umgebung einer regulären Stelle $x=0$ ist eine Function, die sich in dieser Umgebung selbst regulär verhält und für $x=0$ nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen willkürliche Werte anzunehmen fähig ist.*

Diese willkürlich zu bestimmenden n Werte nennt man auch die *Anfangswerte des Integrals*. Legt man den Anfangswerten in (2) spezielle Werte bei, so erhält man aus dem allgemeinen ein partikuläres Integral. Hier gilt der Satz:

Bildet man aus dem allgemeinen Integral η durch n -malige verschiedene Wahl der Anfangswerte n partikuläre Integrale

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n,$$

1) S. Anhang, Zu Kap. IV, Satz 3.

so bilden diese dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn die Determinante der n^2 Anfangswerte von Null verschieden ist. Denn diese Determinante ist ja die Determinante der n Functionen $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n$ für $x = 0$, deren nicht identisches Verschwinden sich mit der linearen Unabhängigkeit von $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n$ deckt.

Als wichtigstes Ergebnis dieses Artikels wiederholen wir:

Bei einer regulären Stelle der Differentialgleichung verhalten sich die sämtlichen Integrale regulär. Das allgemeine Integral können wir daselbst in Gestalt einer gewöhnlichen Potenzreihe aufstellen, deren n erste Coefficienten willkürlich bleiben, während alle folgenden bestimmte lineare homogene Functionen von jenen sind.

34. Die sogenannten scheinbar singulären Punkte. Wir bemerken an dieser Stelle, dass die Umkehrung des ersten Teiles des soeben ausgesprochenen Satzes nicht erlaubt ist: es ist sehr wohl möglich, dass die sämtlichen Integrale bei einer Stelle $x = 0$ sich regulär verhalten, d. h. gewöhnliche Potenzreihen von x sind, ohne dass $x = 0$ eine reguläre Stelle der Differentialgleichung ist.

Sei nämlich

$$x^{\alpha_1} P_1(x), \quad x^{\alpha_2} P_2(x), \dots, x^{\alpha_n} P_n(x),$$

wo $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ positive ganze Zahlen oder Null und $P_1 P_2 \dots P_n$ gewöhnliche Potenzreihen von x mit von Null verschiedenem constanten Glied sind, ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0,$$

so verhalten sich alle Integrale der letzteren bei $x = 0$ regulär. Man darf dabei annehmen, dass die sämtlichen Zahlen $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ von einander verschieden sind, weil man andernfalls solche lineare homogene Verbindungen der Functionen $x^{\alpha_1} P_1, \dots, x^{\alpha_n} P_n$ an ihre Stelle setzen kann, bei denen jene Forderung erfüllt ist, und die immer noch linear unabhängig sind¹⁾. Dann ist die Determinante dieses Fundamentalsystems

$$(3) \quad D \equiv \begin{vmatrix} x^{\alpha_1} P_1 & x^{\alpha_2} P_2 & \dots & x^{\alpha_n} P_n \\ x^{\alpha_1-1} P_{11} & x^{\alpha_2-1} P_{21} & \dots & x^{\alpha_n-1} P_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{\alpha_1-n+1} P_{1,n-1} & x^{\alpha_2-n+1} P_{2,n-1} & \dots & x^{\alpha_n-n+1} P_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

wo die neueingeführten P wieder gewöhnliche Potenzreihen sind. Also ist

1) S. Anhang, Zu Kap. IV. Satz 4.

$$(4) \quad D \equiv x^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - \frac{n(n-1)}{2}} \cdot \Delta,$$

wo Δ für $x=0$ weder unendlich wird, noch verschwindet. Ersteres folgt daraus, dass alle Elemente von Δ gewöhnliche Potenzreihen sind, Letzteres daraus, dass für $x=0$ Δ in die Form

$$\Delta_{(x=0)} \equiv P_1(0) \cdot P_2(0) \dots P_n(0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \alpha_n \\ \alpha_1(\alpha_1-1) & \alpha_2(\alpha_2-1) & \dots \alpha_n(\alpha_n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots \vdots \end{vmatrix}$$

zu setzen ist. Denn $P_1(0), \dots, P_n(0)$ sind nach Voraussetzung $\neq 0$ und ebenso die Determinante rechts, da diese leicht umzuformen ist in

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1) \dots (\alpha_n - \alpha_1) \dots (\alpha_n - \alpha_{n-1})^1$$

und alle α von einander verschieden sind.

Nach Gleichung (4) verschwindet also D für $x=0$ dann und nur dann, wenn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > \frac{n(n-1)}{2}$, d. h. wenn mindestens eine der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > n-1$ ist. Da aber nach Artikel 28

$$(5) \quad D = C \cdot e^{-\int p_1 dx},$$

wo $C \neq 0$, so ist $x=0$ *singuläre* Stelle der Differentialgleichung, sobald D für $x=0$ verschwindet. Wenn dagegen D für $x=0$ nicht verschwindet, so sind nach den Formeln (4) Art. 26 alle Coefficienten der Differentialgleichung für $x=0$ endlich, da ja die Determinanten D_1, D_2, \dots, D_n nur positive Potenzen von x enthalten, also für $x=0$ nicht unendlich werden. $x=0$ ist dann also *reguläre* Stelle.

Wir haben daher das Resultat:

Dann²⁾ und nur dann, wenn ein bei $x=0$ reguläres Fundamentalsystem einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung derart

1) Vergl. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. § 10. 1. S. 85.

2) Den durch das Einleitungswort „dann“ charakterisierten Teil des obigen Satzes verdankt der Verf. einer privaten Mitteilung von Herrn Kochler in Heidelberg. Vgl. auch Fabry, Sur les intégrales des équations différentielles etc., Thèse, Paris, 1885.

beschaffen ist oder umgeformt werden kann, dass die einzelnen Elemente bzw. zu den Exponenten

$$0, 1, 2, \dots, n-1$$

gehören, ist $x=0$ reguläre Stelle der Differentialgleichung.

Wir wollen deshalb eine Stelle, bei welcher die Coefficienten zwar zum Teil unendlich werden, die sämtlichen Integrale aber sich trotz dem regulär verhalten, eine *scheinbar singuläre Stelle der Differentialgleichung* nennen und im Gegensatz dazu, wenn es darauf ankommt, die Unterscheidung zu betonen, von *wirklich singulären Stellen* sprechen.

Gleichzeitig haben wir nach der obigen Ableitung das Resultat:

Bei einer scheinbar singulären Stelle verschwindet die Determinante des Fundamentalsystems.

Umgekehrt kann man sofort die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angeben, dass eine singuläre Stelle der Differentialgleichung eine solche scheinbar singuläre Stelle ist¹⁾:

- 1) die n Wurzeln der zu der betreffenden Stelle gehörigen determinierenden Gleichung müssen n von einander verschiedene positive ganze Zahlen sein, worunter sich auch die Null befinden kann und von denen mindestens eine $> n-1$ sein muss.
- 2) Bei jeder von diesen Wurzeln müssen die Bedingungen des Artikel (14) erfüllt sein, dass zu ihr eine Reihe gehört.

35. Die linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten. Von dem Inhalt des Artikel 33 können wir Anwendung machen auf die wichtige Klasse der linearen homogenen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten

$$(6) \quad P(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0,$$

wo a_1, a_2, \dots, a_n Constanten sind. Für diese Gleichung ist jeder endliche Wert von x regulär und seine Umgebung die ganze x -Ebene. Wir wollen daher für $x=0$ ein Fundamentalsystem von Integralen aufstellen.

Um zunächst ein partikuläres Integral zu erhalten, wählen wir in dem allgemeinen Integral

$$\eta = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k x^k$$

die n Anfangswerte bzw.

$$= 1, r, r^2, \dots, r^{n-1},$$

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. 68. (1868) S. 381, wo die scheinbar singulären Stellen „ausserwesentlich singulär“ genannt werden.

wo r eine noch zu bestimmende Grösse ist, also

$$\eta_0 \equiv 1, \quad \eta_0' \equiv r, \quad \eta_0'' \equiv r^2, \dots, \eta_0^{(n-1)} \equiv r^{n-1}.$$

Damit nun auch die n^{te} Ableitung von η für $x = 0$ sich dieser Form anpasst, also gleich der n^{ten} Potenz von r wird, muss r der Gleichung genügen

$$(7) \quad \varphi(r) \equiv r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

und umgekehrt, wenn r eine Wurzel der Gleichung (7) ist, so ist $\eta_0^{(n)} = r^n$ und sogar ganz allgemein

$$(8) \quad \eta_0^{(\lambda)} = r^\lambda \quad (\lambda = n, n+1, \dots).$$

Ist nämlich schon bis zu irgend einem Wert von λ diese Behauptung erfüllt — und sie ist es ja bis $\lambda = n$ — so gilt sie auch für den nächst grösseren Wert von λ . Dies zu beweisen, differenzieren wir die Identität

$$\eta^{(n)} + a_1 \eta^{(n-1)} + \dots + a_n \eta = 0$$

$(\lambda - n)$ -mal nach x

$$\eta^{(\lambda)} + a_1 \eta^{(\lambda-1)} + \dots + a_n \eta^{(\lambda-n)} = 0,$$

woraus folgt

$$(9) \quad \eta^{(\lambda)} = -[a_1 \eta^{(\lambda-1)} + \dots + a_n \eta^{(\lambda-n)}].$$

Gilt nun (8) schon bis $\lambda = 1$, so folgt aus (9)

$$\eta^{(\lambda)} = r^{\lambda-n} [a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_n]$$

oder

$$\eta^{(\lambda)} = r^{\lambda-n} [\varphi(r) - r^n] = r^\lambda,$$

da r ja eine Wurzel der Gleichung (7) ist.

Hiermit ist die Gültigkeit der Gleichung (8) allgemein dargethan, und wir haben das partikuläre Integral

$$\eta = 1 + \frac{r}{1} x + \frac{r^2}{2!} x^2 + \frac{r^3}{3!} x^3 + \dots,$$

wenn r eine Wurzel der Gleichung $\varphi(r) = 0$ ist, die man wegen dieser Bedeutung die *charakteristische Gleichung der Differentialgleichung* (6) nennt. Sie wird aus der Differentialgleichung gebildet, indem man einfach jede Ableitung von y durch die Potenz von r ersetzt, deren Exponent gleich der Ordnung der Ableitung ist.

Die für η ermittelte Reihe stellt nun bekanntlich die *Exponentialfunction*

$$e^{rx}$$

dar. Wir können uns aber auch auf den Standpunkt stellen, dass wir diese Function noch gar nicht kennen und die durch die Reihe definierte Function von rx nur mit dem Zeichen e^{rx} belegen. Als dann lehrt uns die Theorie der linearen Differentialgleichungen die

wichtige Eigenschaft dieser Function, dass jene Darstellung für die ganze x -Ebene gilt, weil ja die Umgebung der Stelle $x = 0$ der Differentialgleichung die ganze x -Ebene bedeckt. Wir erfahren also lediglich aus der Differentialgleichung selbst, dass

$$e^{rx} \equiv 1 + \frac{rx}{1} + \frac{(rx)^2}{2!} + \dots,$$

wie man auch sagt, eine *beständig convergente Potenzreihe* ist.

Hat nun die charakteristische Gleichung (7) n verschiedene Wurzeln r_1, r_2, \dots, r_n , so erhalten wir auf diese Art n partikuläre Integrale

$$(10) \quad e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x},$$

deren lineare Unabhängigkeit im nächsten Artikel bewiesen wird.

Hat dagegen die charakteristische Gleichung weniger als n verschiedene Wurzeln, so erhält man zunächst weniger als n partikuläre Integrale. Ist aber dann z. B. r_1 eine γ -fache Wurzel, so ist

$$(11) \quad \varphi(r_1) \equiv 0, \quad \varphi'(r_1) \equiv 0, \dots, \varphi^{(\gamma-1)}(r_1) \equiv 0.$$

Setzt man nun, um weitere Integrale zu finden, unter Anwendung der im Artikel 30 vorgeführten Fuchs'schen Methode

$$(12) \quad y = e^{r_1 x} \int z dx,$$

so erhält man für z die Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(13) \quad z^{(n-1)} + z^{(n-2)}[nr_1 + a_1] \\ + z^{(n-3)}\left[\binom{n}{2}r_1^2 + \binom{n-1}{1}a_1r_1 + a_2\right] \\ + z^{(n-4)}\left[\binom{n}{3}r_1^3 + \binom{n-1}{2}a_1r_1^2 + \binom{n-2}{1}a_2r_1 + a_3\right] \\ + \dots \\ + z[nr_1^{n-1} + (n-1)a_1r_1^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}r_1 + a_{n-1}] = 0,$$

welche wieder constante Coefficienten hat und zwar als Coefficient von $z, z', z'', \dots, z^{(n-2)}$ bezw.

$$\varphi'(r_1), \quad \frac{\varphi''(r_1)}{2!}, \quad \frac{\varphi'''(r_1)}{3!}, \dots, \frac{\varphi^{(n-1)}(r_1)}{n-1!}.$$

Mit Rücksicht auf die Identitäten (11) lautet also (13)

$$(13^a) \quad z^{(n-1)} + \frac{\varphi^{(n-1)}(r_1)}{(n-1)!} z^{(n-2)} + \dots + \frac{\varphi^{(\gamma)}(r_1)}{\gamma!} z^{(\gamma-1)} = 0.$$

Diese Gleichung wird aber erfüllt, wenn man

$$z = A_0 + A_1 x + \dots + A_{\gamma-2} x^{\gamma-2}$$

setzt, wo $A_0, A_1, \dots, A_{\gamma-2}$ völlig willkürliche Constanten sind. Also liefert (12) für Gleichung (6) das Integral

$$y = e^{r_1 x} [B_0 + B_1 x + \dots + B_{\gamma-1} x^{\gamma-1}]$$

wo die B willkürliche Constanten sind, oder also die γ Integrale

$$(14) \quad e^{r_1 x}, \quad x e^{r_1 x}, \dots, x^{\gamma-1} e^{r_1 x}.$$

Auf diese Weise gelangt man bei einer γ -fachen Wurzel der charakteristischen Gleichung zu γ Integralen der Differentialgleichung (6), also im Ganzen stets zu n Integralen.

36. Nachweis der linearen Unabhängigkeit der n aufgestellten Integrale der Differentialgleichung mit constanten Coefficienten. Um zu beweisen, dass die ermittelten n Integrale der Differentialgleichung (6) in jedem Falle ein Fundamentalsystem bilden, brauchen wir nach Artikel 33 nur zu zeigen, dass die Determinante der n^2 Anfangswerte von Null verschieden ist. Diese Determinante lautet aber, wenn wir gleich den allgemeinen Fall, dass mehrfache Wurzeln der charakteristischen Gleichung vorhanden sind, in's Auge fassen,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & \dots & r_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2r_1 & \dots & (n-1)r_1^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & (n-1)(n-2)r_1^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & r_2 & r_2^2 & \dots & r_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Sie ist so gebildet, dass einer γ -fachen Wurzel γ Zeilen entsprechen, deren erste die 0^{te} , 1^{te} , \dots , $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz dieser Wurzel als Elemente enthält, während jede folgende der γ Zeilen aus den Ableitungen der Elemente der vorhergehenden nach der betreffenden Wurzel besteht. Das Verschwinden der Determinante D hätte nun zur Folge¹⁾, dass die Elemente jeder Zeile ein und derselben linearen homogenen Relation genügten, deren Coefficienten nicht sämtlich Null wären. Bezeichnet man diese Coefficienten mit K_0, K_1, \dots, K_{n-1} und setzt

$$K_0 + K_1 r + \dots + K_{n-1} r^{n-1} = g(r),$$

so zieht also das Verschwinden von D die Identitäten nach sich

$$\begin{aligned} g(r_1) &= 0, & g'(r_1) &= 0, & \dots & g^{(\gamma-1)}(r_1) &= 0 \\ g(r_2) &= 0, & g'(r_2) &= 0, & \dots & & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \end{aligned}$$

d. h. die ganze Function höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von r $g(r)$ müsste durch jeden der Linearfactoren der ganzen Function n^{ten} Grades $\varphi(r)$ und zwar durch jeden ebenso oft als jene teilbar sein. Dieser

Widerspruch löst sich nur dadurch, dass alle $K_0, K_1 \dots K_{n-1}$ identisch Null sein müssen oder $D \neq 0$ ist.

Hiermit ist erwiesen, dass die n Integrale der Gleichung (6), die wir im vorigen Artikel ermittelt haben, ein Fundamentalsystem bilden.

Die in den beiden letzten Artikeln entwickelte Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten führt also zu folgendem Ergebnis:

Wenn

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

eine lineare homogene Differentialgleichung mit constanten Coefficienten ist, so bildet man die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\varphi(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Jeder γ -fachen Wurzel derselben r_1 entsprechen die γ Integrale

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, \dots, x^{\gamma-1} e^{r_1 x}$$

der Differentialgleichung. Die n so resultierenden Integrale bilden ein Fundamentalsystem.

37. Beispiele. Zwei ganz einfache Beispiele mögen noch der allgemeinen Untersuchung folgen.

1. Beispiel:

$$(15) \quad y'' + y = 0$$

ist eine lineare homogene Differentialgleichung mit constanten Coefficienten. Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet

$$r^2 + 1 = 0$$

und hat die Wurzeln $+i, -i$, wenn $i = \sqrt{-1}$. Wir haben daher das Fundamentalsystem

$$e^{xi}, e^{-xi}.$$

Da auch jede lineare homogene Verbindung der Elemente desselben mit constanten Coefficienten ein Integral ist, so müssen auch

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

der Differentialgleichung (15) genügen, wovon man sich in der That leicht überzeugt.

$\cos x$ und $\sin x$ sind aber wieder ein Fundamentalsystem; denn ihre Determinante ist

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

Will man umgekehrt die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung bilden, von der $\cos x, \sin x$ ein Fundamentalsystem sind, so lautet dieselbe nach Artikel 26.

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ \cos x & -\sin x & -\cos x \\ \sin x & \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$y + y'' = 0,$$

sodass man, wie es der Fall sein musste, wiederum Gleichung (15) erhält.

2. *Beispiel:*

$$(16) \quad y''' - y'' - y' + y = 0.$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$r^3 - r^2 - r + 1 = (r - 1)^2(r + 1) = 0$$

und hat die Wurzeln

$$1, 1, -1.$$

Ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (16) lautet also

$$e^x, xe^x, e^{-x}.$$

Kapitel VI.

Die Integralfunction im ganzen Gebiet der Differentialgleichung. Gruppe der Differentialgleichung.

38. Feststellung der zu behandelnden Aufgabe. Im vorigen Kapitel haben wir das Verhalten der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung

$$(1) \quad P(x, y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

in der Umgebung einer regulären Stelle untersucht und für eine solche ein Fundamentalsystem von Integralen aufgestellt. Bevor wir uns aber nun zu den singulären Stellen wenden, tritt, wie schon in Artikel 32 bemerkt wurde, noch eine andere Aufgabe an uns heran, die in dem gegenwärtigen Kapitel ihre Erledigung finden soll.

Der Bereich, für den bisher die Integrale definiert sind, ist die Umgebung des jeweils in's Auge gefassten regulären Punktes, also bei unsern Formeln die Umgebung des Punktes $x = 0$ oder das Innere eines Kreises, welcher im Allgemeinen nur einen Teil des Gebietes der Differentialgleichung ausmacht. Denn nicht immer wird wie in dem Beispiel der Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten die Umgebung eines beliebigen Punktes bereits das ganze Gebiet der Differentialgleichung bedecken. Während also auf der einen Seite das allgemeine Integral zunächst nur für ein beschränktes Gebiet definiert ist, wissen wir andererseits — weil wir bei jedem beliebigen andern regulären Punkt geradeso wie bei $x = 0$ verfahren können —, dass in dem ganzen regulären Teil des Gebietes der Differentialgleichung das allgemeine Integral wirklich existiert. Es drängt sich daher eine Frage auf, der wir eine doppelte Fassung geben können. Wir wünschen nämlich zu wissen:

1) *Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Fundamentalsystem von regulären Integralen, welches für die reguläre Stelle $x = 0$ und dem, welches für eine beliebige andere reguläre Stelle $x = a$ aufgestellt wird?*

2) *Wie ermittelt man den Wert, den ein zunächst nur für die*

Umgebung der regulären Stelle $x = 0$ definiertes Integral in einer beliebigen andern regulären Stelle $x = a$ erhält?

Es ist dies in der That nur eine verschiedene Fassung derselben Frage; denn wir werden sehen, dass mit der einen der beiden Fragen zugleich auch die andere ihre Beantwortung findet. Als Ausgangspunkt der Untersuchung wählen wir die zweite Form der Fragestellung.

39. Analytische Fortsetzung der Integrale. Es sei

$$(2) \quad \eta = \mathfrak{F}_0(x|0) := \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k x^k$$

ein für die Umgebung der regulären Stelle $x = 0$ definiertes Integral mit den Anfangswerten

$$\eta_0 \eta_1 \dots \eta_{n-1}.$$

Den Kreis, welcher die Umgebung von $x = 0$ darstellt, wollen wir mit K_0 , die Umgebung einer beliebigen andern regulären Stelle x_i mit K_i , die zugehörigen Radien mit R_0, R_i bezeichnen. Nun fragen wir: welchen Wert nimmt das zunächst nur für K_0 definierte Integral η in einem ausserhalb K_0 gelegenen beliebigen regulären Punkt $x = a$ an?

Zur Beantwortung dieser Frage verbinden wir die beiden Punkte $x = 0$ und $x = a$ durch eine beliebige, sich selbst nicht schneidende Curve C von endlicher Länge, welche in ihrem ganzen Verlauf einen endlichen (nicht unendlich klein werdenden) Abstand von singulären Punkten bewahrt. Dass eine solche Curve sich immer herstellen lässt, folgt aus den Bemerkungen über das Gebiet der Differentialgleichung (Art. 2). Sie wäre nicht herstellbar, wenn das Gebiet der Differentialgleichung aus getrennten Teilen bestünde und die Punkte 0 und a in zwei verschiedenen Theilen lägen.

Nun sei \bar{x}_1 der erste — falls es deren mehrere giebt — Schnittpunkt von von K_0 und C in der Richtung von 0 nach a , x_1 ein Punkt auf C zwischen 0 und x_1 , der der Bedingung genügt

$$|x_1 - \bar{x}_1| < R_1,$$

wo R_1 nach der vorhin eingeführten Bezeichnung der Radius der Umgebung K_1 des Punktes x_1 ist. Diese Bestimmung eines Punktes x_1 ist wiederum stets möglich;

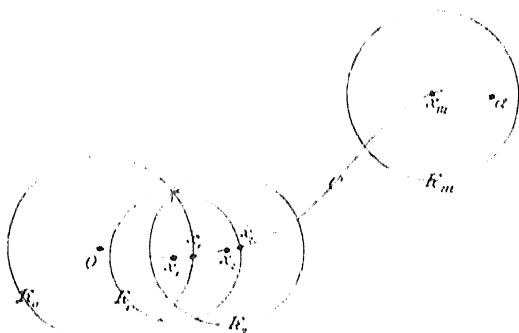


Fig. 1.

denn der Radius der Umgebung eines jeden Punktes auf C unter der Voraussetzung keine unendlich kleine Grösse; also braucht x_1 nur hinreichend nahe an x_1 auf C heranzurücken, um die Ungleichung zu erfüllen. Der Kreis K_1 greift dann notwendig die Fläche von K_0 hinaus.

Ist dann \bar{x}_2 der erste Schnittpunkt des Curvenstückes mit dem Kreis K_1 , so kann man abermals einen Punkt x_2 auf C zwischen x_1 und \bar{x}_2 annehmen, sodass

$$|x_2 - x_1| < R_2$$

u. s. w. Man erhält auf diese Art auf C die Folge von Punkten x_1, x_2, \dots , deren jeder noch innerhalb der Umgebung des Punktes a liegt, aber von jenem durch ein Stück der Curve C der endlichen Länge getrennt ist. Da aber die ganze Curve C eine endliche Länge haben sollte, wird man folglich nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen jener Operation zu einem Punkte a gelangen, derart, dass sowohl a wie das Curvenstück von a nach a innerhalb des Kreises K_m liegt.

Jetzt wandeln wir die Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x|0)$, welche nach x fortschreitet, in eine nach Potenzen von $x - x_1$ fortschreitende Reihe um. Wir setzen zu dem Zweck

$$x = (x - x_1) + x_1,$$

entwickeln die einzelnen Potenzen von x in $\mathfrak{P}_0(x|0)$ nach dem binomischen Satz in Potenzen von $x - x_1$, ordnen dann alle Glieder nach Potenzen von $x - x_1$ und erhalten so

$$\mathfrak{P}_0(x|0) = \mathfrak{P}_1(x|x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_1)^k.$$

Die letztere Reihe convergirt sicher, solange x innerhalb des Kreises K_0 um x_1 als Mittelpunkt bleibt, der noch ganz innerhalb K_0 liegt. Der wahre Convergenzkreis der neuen Reihe ist aber grösser als der von K_0 und wird folgendermassen ermittelt.

$$\eta = \mathfrak{P}_1(x|x_1)$$

ist ein Integral der Differentialgleichung (1) bei der regulären Integration $x = x_1$; denn $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ ist ja nur eine Umformung der Reihe $\mathfrak{P}_0(x|0)$ und x_1 liegt noch im Convergenzgebiet von $\mathfrak{P}_0(x|0)$. Folglich ist $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ in dem allgemeinen, für die Umgebung von x_1 gültigen Integral von (1) bei geeigneter Wahl der Anfangswerte enthalten und der Convergenzkreis von $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ mit demjenigen des allgemeinen Integrals, d. h. mit K_1 , übereinstimmend.

Wir haben also das zunächst nur für das Innere von K_1 gilt.

Integral η nun auch für K_1 definiert, d. h. für das Innere eines Kreises, der über die Fläche von K_0 hinausgreift.

Genau so fahren wir nun fort, indem wir die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ in eine innerhalb K_2 convergente Reihe

$$\mathfrak{P}_2(x|x_2)$$

umwandeln, welche innerhalb K_2 die Function η darstellt u. s. w., bis wir zu der innerhalb K_m gültigen Darstellung von η

$$\eta = \mathfrak{P}_m(x|x_m)$$

gelangen, welche die Berechnung des Wertes von η für $x=a$ gestattet. Denn der letztere Punkt liegt ja innerhalb K_m .

Das hier angewandte Verfahren nennt man *die analytische oder Kreis-Fortsetzung der Function η längs der Curve C* . Dasselbe führt zu dem Resultat:

Wenn man das zunächst nur für das Innere der Umgebung von $x=0$ definierte Integral η längs einer bestimmten Curve C nach einer beliebigen andern regulären Stelle $x=a$ hin fortsetzt, so erhält man einen bestimmten Wert des Integrals η für $x=a$.

40. Das monogene Gebilde der Integralfunction. Mit dem vorstehenden Satze ist das Integral η thatsächlich für das ganze Gebiet der Differentialgleichung mit Ausnahme der singulären Stellen definiert. Denn aus der einen Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x|0)$ entspringen vermöge der Fortsetzung unzählig viele andere, welche die Function η in der Umgebung eines jeden regulären Wertes von x darstellen. Die Gesamtheit dieser Darstellungsformen oder Potenzreihen, welche alle aus einer einzigen von ihnen in der angegebenen Art abzuleiten sind, nennt man aber nach Weierstrass das *monogene Gebilde der Function η* , während die einzelnen Potenzreihen, welche die Function η in der Umgebung der einzelnen Werte von x darstellen, *die Elemente dieser Function* und, wenn es sich wie in unserm Fall um reguläre Stellen handelt, speziell *die regulären Elemente derselben* heissen.

Verstehen wir unter

$$\eta = \mathfrak{P}_0(x|0)$$

nunmehr das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1), bei welchem also die n ersten Coefficienten der Reihe $\mathfrak{P}_0(x|0)$ noch willkürlich sind, so führt das auf dieses Integral angewandte Fortsetzungsverfahren zu dem *Begriff des monogenen Gebildes der allgemeinen Integralfunction*.

Wir sehen jetzt, dass wir *nicht* zu einem solchen monogenen Functionsgebilde gelangt wären, wenn wir zugelassen hätten, dass das Gebiet der Differentialgleichung aus mehreren unter einander nicht

zusammenhängenden Bereichen G_1, G_2, \dots bestehen kann. Denn in diesem Fall hätte man ja die für die Umgebung eines Punktes in G_1 z. B. definierten Integrale nicht nach den Punkten der andern Gebiete hin fortsetzen können. Man hätte also in *jedem* der Gebiete ein Functionselement aufstellen müssen, um daraus für dieses Gebiet ein monogenes Functionsgebilde abzuleiten. Man gelangte also dann zu dem gleichen Resultat, als wenn man die Differentialgleichung (1) einmal unter dem Gesichtspunkt behandelt, die Coefficienten wären *nur für G_1* , ein anderes Mal, sie wären *nur für G_2* u. s. w. definiert. Hiermit ist die in Artikel 2 aufgestellte Behauptung erwiesen.

41. Gebiet der Eindeutigkeit der Integralfunction. Nachdem wir nunmehr den Begriff der für das ganze Gebiet der Differentialgleichung — mit Ausnahme der singulären Stellen — definierten Integralfunction gewonnen haben, können wir die noch zu erledigenden Aufgaben auch *die Untersuchung der Integralfunction im ganzen Gebiet der Differentialgleichung* nennen. Bei einer solchen functionentheoretischen Untersuchung ist aber die erste Frage die nach der *Eindeutigkeit der Function*. Wir wollen daher jetzt ermitteln, *in welchem Gebiete sich die Integralfunction eindeutig verhält*.

Das partikuläre Integral η , welches durch Gleichung (2) gegeben war, erhielt nach Artikel 39 in einem beliebigen regulären Punkt $x = a$ einen bestimmten Wert, wenn man auf einem bestimmten Wege C von 0 nach a fortschritt. Wir verbinden nun die beiden Punkte 0 und a durch eine zweite Curve C' , welche folgenden Bedingungen genügt: sie geht der Reihe nach durch die Punkte

$x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m$, von denen x'_1 gleichzeitig innerhalb K_0 und K_1 , x'_2 gleichzeitig innerhalb K_1 und K_2 , u. s. w., endlich x'_m gleichzeitig innerhalb K_{m-1} und K_m liegt, und dabei verläuft das Stück der Curve C' von x_0 bis x'_1 ganz innerhalb K_0 , das von x'_1 bis x'_2 ganz innerhalb K_1 , u. s. w., endlich das Stück der Curve C' von x'_m bis a ganz innerhalb K_m . Beide Curven be-

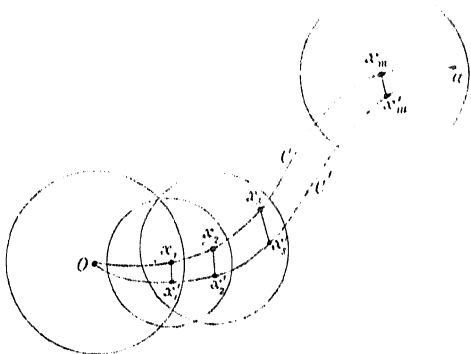


Fig. 2.

sitzen während ihres Verlaufs einen Abstand von einander der — abgesehen von den Endpunkten — nirgends unendlich klein wird.

Benutzen wir nun die Curve C' gerade wie vorher C , um das Integral η von $x=0$ nach $x=a$ fortzusetzen, so gelangen wir in $x=a$ zu demselben Wert wie vorher. Hiervon überzeugen wir uns schrittweise, indem wir die Curve C in die einzelnen Stücke

$$0x_1, \quad x_1x_2, \quad x_2x_3, \dots, x_mx,$$

die Curve C' in die entsprechenden Stücke

$$0x'_1, \quad x'_1x'_2, \quad x'_2x'_3, \dots, x'_ma$$

zerlegen und jedesmal die Punkte

$$x_1 \text{ und } x'_1, \quad x_2 \text{ und } x'_2, \dots, x_m \text{ und } x'_m$$

geradlinig mit einander verbinden. Berechnet man nun den Wert des durch seine Anfangswerte für $x=0$ definierten Integrals η für $x=x_1$, indem man sich entweder denkt, dass man direkt auf der Curve C dahin geht oder auf C' erst nach x'_1 und dann geradlinig von x'_1 nach x_1 , so ist das Resultat dasselbe, weil man sich nur innerhalb des Kreises K_0 bewegt hat, in welchem man die Function η durch eine und dieselbe Potenzreihe ($\mathfrak{P}_0(x|0)$) darstellen kann. Berechnet man dann den Wert der jetzt innerhalb K_1 durch die Gleichung

$$\eta = \mathfrak{P}_1(x|x_1)$$

darstellbaren Function η in x_2 , indem man entweder auf C direkt von x_1 nach x_2 übergeht, oder von x_1 nach x'_1 (wobei jetzt in x'_1 η denselben Wert erhält, den es vorher in diesem Punkte hatte), von x'_1 auf C' nach x'_2 , von x'_2 geradlinig nach x_2 , so ist das Resultat wieder das gleiche, weil man beide Male innerhalb K_1 geblieben, worin η durch eine gewöhnliche Potenzreihe darstellbar, also eindeutig ist. Fasst man nun die beiden, nacheinander ausgeführten Schritte zusammen, so kann man den Weg x'_1x_1 und den entgegengesetzten $x_1x'_1$ einfach weglassen, weil man in x'_1 , wie oben schon bemerkt wurde, wieder zu demselben Wert von η zurückkehrt, mit dem man das erste Mal ausging. Hiernach führen die beiden Wege von 0 nach x_2 , wenn man einmal direkt auf C geht, ein zweites Mal erst auf C' nach x'_2 dann geradlinig von x'_2 nach x_2 , in x_2 zu demselben Wert von η .

Genau so weiterschliessend erkennt man, dass die Fortsetzung des Integrals η von 0 nach a auf C und C' zu demselben Wert führt.

Nun kann man C' so behandeln wie vorher C , also auf C' eine Reihe von Punkten annehmen und eine Curve C'' so legen, dass sie successive in deren Umgebungen verläuft, u. s. w. Man kann die Wegcurve zwischen 0 und a in dieser Weise allmählig immer weiter und weiter variieren und schliesslich in eine beliebige andere Lage überführen, falls nur zwischen dieser und der ursprünglichen Lage der

Curve keine singulären Punkte eingeschlossen sind. Denn, wenn man sich bei der Verschiebung der Curve zwischen 0 und a aus der Lage C in die Lagen C' , C'' , ... einer singulären Stelle nähert, so werden in ihrer Nähe die Convergenzkreise der Punkte auf der Wegecurve immer kleiner und kleiner, schliesslich unendlich klein, sodass man zuletzt den für die Curve geforderten Eigenschaften nicht mehr genügen kann. Liegt dagegen zwischen irgend zwei die Punkte 0 und a verbindenden Curven C und C_1 kein singulärer Punkt, so kann man in der angegebenen Weise stets von der einen successive zu der andern übergehen. Zwei solche Wege führen also stets zu demselben Wert des Integrals.

Wie man sich nun z. B. bei den Functionen \sqrt{x} und $\log x$, welche nicht in der ganzen x -Ebene E eindeutig sind, ein Gebiet der Eindeutigkeit H' dadurch herstellen kann, dass man einen als unüberschreitbar geltenden *Verzweigungsschnitt* von 0 bis in's Unendliche legt, ähnlich hier. Das Gebiet der Differentialgleichung besteht aus der Gesamtheit der regulären und ausserwesentlich singulären Punkte der Differentialgleichung und bildet einen zusammenhängenden Bereich G . Dieser entsteht aus der ganzen unendlichen x -Ebene, indem sämtliche wesentlich singuläre Stellen aus derselben ausgeschnitten werden, sei es dass dies isolierte Punkte sind, oder dass sie ganze Curven oder Flächenstücke anfüllen. Sticht man in gleicher Weise aus G auch noch die sämtlichen ausserwesentlich singulären Stellen aus (etwa durch unendlich kleine diese Punkte umgebende Conturen) und alle unendlich grossen Werte von x (etwa durch einen Kreis um einen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt mit beliebig grossem Radius), so kann man den übrig bleibenden Bereich, der nur von regulären Punkten erfüllt ist, den *regulären Teil des Gebietes der Differentialgleichung* nennen. Die Begrenzung dieses zusammenhängenden Bereichs besteht nach Vorstehendem aus einer Anzahl geschlossener Curven. Werden diese etwa durch C_1, C_2, \dots, C_k bezeichnet und verbindet man C_1 mit C_2 , C_2 mit C_3 , u. s. w., C_{k-1} mit C_k durch einander und sich selbst nicht schneidende Schnittlinien, sogenannte *Verzweigungsschnitte*, so erhält man ein ebenes zusammenhängendes Gebiet G' , welches nur von einer einzigen geschlossenen Curve begrenzt wird und in der Sprache der *Analysis Situs* — ein *einfach zusammenhängendes Gebiet* heisst. Beschränken wir die unabhängige Variable x auf ein solches Gebiet G' , so ist es offenbar *gar nicht möglich*, dass zwei Wege von x , welche dieselben Punkte mit einander verbinden, singuläre Punkte zwischen sich einschliessen. Je zwei solche Wege müssen daher notwendig zu demselben Endwert des Integrals führen, und wir können nunmehr das Resultat des gegenwärtigen Artikels folgendermassen aussprechen:

Die Integralfunction η der Differentialgleichung (1) ist eindeutig in jedem einfach zusammenhängenden, von singulären Punkten freien Gebiet, das man aus dem Gebiet der Differentialgleichung herstellen kann.

42. Zweige der Integralfunction. Beschränkt man die unabhängige Variable x auf ein solches Gebiet G' , so erhält man durch Fortsetzung des Integrals

$$\eta = \mathfrak{P}_0(x|0)$$

über dieses ganze Gebiet einen *eindeutigen Zweig der Integralfunction*, d. h. wenn in der Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x|0)$ die willkürlichen Constanten einmal in irgend einer Weise festgelegt sind, liefert die gedachte Fortsetzung der Function η in jedem beliebigen Punkte von G' einen und nur einen bestimmten Wert derselben. Ueberschreitet man dagegen bei der Fortsetzung von η einen oder mehrere der Verzweigungsschnitte und sieht diese Linien darauf wieder als unüberschreitbar an, so hat man abermals einen in G' eindeutigen Zweig der Integralfunction, der aber im Allgemeinen von dem zuerst betrachteten verschieden ist, d. h. in jedem Punkte von G' einen andern Wert annimmt als jener. Der erste Zweig ging also beim Ueberschreiten jener Linie in den zweiten über, und daher rechtfertigt sich der Name *Verzweigungsschnitt* für die gedachten Linien.

Im Allgemeinen kommt man so zu immer neuen, also zu unendlich vielen Zweigen der Integralfunction.

Das Beispiel der Gauss'schen Differentialgleichung

$$(3) \quad x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0$$

möge diese Begriffe noch näher veranschaulichen. Das Gebiet dieser Differentialgleichung ist die gesamte x -Ebene; die einzigen singulären Punkte im Endlichen sind $x=0$ und $x=1$. Benutzt man also z. B. den positiven Teil der reellen Axe in der x -Ebene als Verzweigungsschnitt, so entsteht nach dieser Festsetzung ein einfach zusammenhängendes Gebiet G' , welches nur reguläre Werte enthält, d. h. ein Gebiet, in welchem man nicht zwei Punkte durch zwei solche Curven mit einander verbinden kann, dass zwischen beiden ein singulärer Punkt liegt.

Definiert man nun ein Integral η der Differentialgleichung (3) durch eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - x_0$ in der Umgebung der beliebigen, nicht gerade auf dem Verzweigungsschnitt liegenden regulären Stelle x_0 , mit den Anfangswerten η_0, η_1 , so erhält dieses Integral bei Fortsetzung über das ganze Gebiet G' , wenn man nur den Verzweigungsschnitt als unüberschreitbar gelten lässt, in jedem Punkte einen ganz bestimmten Wert, auf welchem Wege man auch dahin gelangt. Insbesondere kehrt man daher in x_0 immer wieder zu

Relationen (6) selbst in demselben Sinne wie vorher der Endwert des von $x=0$ nach $x=a$ fortgesetzten Integrals η von der zu diesem Uebergang benutzten Folge von Zwischenwerten abhängig sind.

Um nun zu einem expliciten Ausdruck für die Coefficienten A_{ik} zu gelangen, drücken wir bei jedem Schritt der Fortsetzung das fortgesetzte Functionensystem $y_{01} \dots y_{0n}$ durch ein in der Umgebung der betreffenden Stelle, bei der wir uns gerade befinden, gültiges Fundamentalsystem aus. Zu dem Ende bezeichnen wir ein in der Umgebung von x_i ($i=1, 2, \dots, m$) gültiges Fundamentalsystem mit

$$y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

und denken uns die Anfangswerte jedes dieser wie des Fundamentalsystems (5) durch die Tabelle

$$(7) \quad \begin{cases} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{cases}$$

bestimmt, wo jede Colonne sich auf ein bestimmtes der Integrale, jede Zeile auf die Ableitungen von bestimmter Ordnung bezieht. Ferner seien die Werte von y_{ik} und seiner $n-1$ ersten Ableitungen in dem Punkte x_{i+1} ($x_{m+1} \equiv a$)

$$(8) \quad \eta_{k0}^{(i)}, \eta_{k1}^{(i)}, \dots, \eta_{k, n-1}^{(i)}.$$

Die Werte des Fundamentalsystems $y_{i1} y_{i2} \dots y_{in}$ und der $n-1$ ersten Ableitungen seiner Elemente in x_{i+1} bilden daher das quadratische System von Grössen

$$\eta_{k\lambda}^{(i)} \quad (k=1, 2, \dots, n; \lambda=0, 1, \dots, n-1),$$

welches wir kurz durch S_i repräsentieren wollen, während

$$(9) \quad |S_i| = |\eta_{k\lambda}^{(i)}| \quad (k=1, 2, \dots, n; \lambda=0, 1, \dots, n-1)$$

die Determinante dieses quadratischen Systems bedeute, die also als Determinante eines Fundamentalsystems für einen regulären Wert $\neq 0$ ist.

Um nun die Coefficienten der Relation

$$(10) \quad y_{ik} = a_{k1}^{(i)} y_{i+1,1} + \dots + a_{kn}^{(i)} y_{i+1,n}$$

zu ermitteln, brauchen wir nur zu (10) noch die durch ein-, zwei-... ($n-1$)-malige Differentiation nach x daraus entstehenden Gleichungen hinzuzufügen und jedesmal $x=x_{i+1}$ zu setzen; dann folgt nach (7) und (8)

$$a_{k\lambda}^{(i)} = \eta_{k, \lambda-1}^{(i)} \quad (k, \lambda=1, 2, \dots, n).$$

Das Fundamentalsystem $y_{i1} \dots y_{in}$ wird also mittelst des Coefficientensystems S_i durch $y_{i+1,1} \dots y_{i+1,n}$ ausgedrückt.

Drückt man aber erst $y_{i1} \dots y_{in}$ mittelst S_i durch $y_{i+1,1} \dots y_{i+1,n}$ aus, dann $y_{i+1,1} \dots y_{i+1,n}$ mittelst S_{i+1} durch $y_{i+2,1} \dots y_{i+2,n}$, so entsteht das Coefficientensystem, welches direkt $y_{i1} \dots y_{in}$ durch $y_{i+2,1} \dots y_{i+2,n}$ ausdrückt, durch *Composition* aus S_i und S_{i+1} , d. h. ein beliebiger Coefficient dieses gedachten Systems ist die Summe der Produkte der Elemente einer Zeile von S_i in die einer Colonne von S_{i+1} . Dieses aus S_i und S_{i+1} componierte System bezeichnen wir durch

$$S_i S_{i+1}.$$

Mit Hülfe dieser Bezeichnung können wir jetzt den expliciten Wert der Coefficienten A_{ik} in (6) angeben; denn da man zuerst $y_{01} \dots y_{0n}$ mittelst S_0 durch $y_{11} \dots y_{1n}$, dann $y_{11} \dots y_{1n}$ mittelst S_1 durch $y_{21} \dots y_{2n}$ u. s. w., endlich $y_{m1} \dots y_{mn}$ mittelst S_m durch $y_{a1} \dots y_{an}$ ausdrückt, so hat man $y_{01} \dots y_{0n}$ mittelst

$$S_0 S_1 \dots S_m$$

durch $y_{a1} \dots y_{an}$ ausgedrückt; d. h. die Coefficienten der Relationen (6) werden gegeben durch die Identität der Systeme

$$(11) \quad (A_{ik}) \equiv S_0 S_1 \dots S_m.$$

Wir haben daher das Resultat:

Setzt man das für die Umgebung von $x=0$ definirte Fundamentalsystem $y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}$ über die Zwischenwerte x_1, x_2, \dots, x_m bis in's Innere der Umgebung eines andern regulären Punktes $x=a$ fort, so wird das Coefficientensystem (A_{ik}) in den Relationen

$$(12) \quad y_{0i} = \sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} y_{ak} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

durch Composition der Systeme S_0, S_1, \dots, S_m erzeugt, wenn S_i ($i=0, 1, \dots, m$) das Coefficientensystem bedeutet, mittelst dessen das in der Umgebung von x_i gültige Fundamentalsystem durch das in der Umgebung von x_{i+1} gültige ausgedrückt wird.

Aus vorstehendem Satz ziehen wir noch eine nahe liegende und wichtige Folgerung.

Die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (12) geben das Resultat der Fortsetzung der n Elemente des Fundamentalsystems $y_{01} \dots y_{0n}$ nach der Umgebung von a . Diese n Integrale bilden wieder ein Fundamentalsystem. Bildet man nämlich die Determinante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

die gar keine Aenderung hervorbringt. In andern Fällen wird man dagegen eine von der identischen verschiedene Substitution erhalten.

Abermals mit Hülfe des Umstandes, dass nach Artikel 41 zwei verschiedene Wege zwischen denselben Punkten dann zu demselben Endwert des Integrals führen, wenn zwischen ihnen kein singulärer Punkt liegt, kann jeder beliebige Umlauf durch eine Anzahl von besonders gestalteten Wegen, die wir *Fundamentalschleifen* nennen wollen, ersetzt werden. Unter einer zu einem bestimmten singulären Punkt $x = a$ gehörigen Fundamentalschleife wollen wir nämlich einen Weg verstehen, der von der beliebigen regulären Stelle $x = 0$, ohne sich selbst zu schneiden oder durch einen singulären Wert hindurchzugehen, bis in die Umgebung von a hinein, dann im Kreis um a herum und auf demselben Weg wie vorher nach 0 zurückführt.

Da nun diese Fundamentalschleifen selbst wieder Umläufe sind, entsprechen ihnen bestimmte Substitutionen, welche ein durch seine Anfangswerte für $x = 0$ irgendwie bestimmtes Fundamentalsystem $y_1 y_2 \dots y_n$ von Integralen beim Durchlaufen der Fundamentalschleifen erleidet. Die Substitution, welche jenes Fundamentalsystem bei dem Durchlaufen einer bestimmten Fundamentalschleife in einer bestimmten der beiden möglichen Richtungen erleidet, nennt man *die zu der betreffenden singulären Stelle gehörige Fundamentalsubstitution* des Fundamentalsystems $y_1 y_2 \dots y_n$. Nach dem Vorstehenden lässt sich also *jede Substitution, die $y_1 y_2 \dots y_n$ bei irgend einem Umlauf von $x = 0$ aus erleidet, aus den Fundamentalsubstitutionen zusammensetzen*, wenn dieselben in geeigneter Reihenfolge und jede die geeignete Anzahl Male nach einander angewandt werden.

Kennen wir aber die sämtlichen Substitutionen S , die das Fundamentalsystem $y_1 y_2 \dots y_n$ bei allen möglichen Umläufen von $x = 0$ aus erleidet, so gilt das Gleiche für ein in der Umgebung der ganz beliebigen regulären Stelle $x = x_0$ irgendwie bestimmtes Fundamentalsystem $u_1 u_2 \dots u_n$ und für alle möglichen Umläufe von $x = x_0$ aus. Jeder Umlauf von x_0 aus kann nämlich ersetzt werden durch einen beliebigen, aber ein für alle Mal festen Weg von x_0 nach 0 , durch einen Umlauf von 0 aus und durch denselben Weg wie vorher von 0 nach x_0 zurück. Ist nun etwa T die Substitution, mittelst deren sich

die $u_1 \dots u_n$ durch $y_1 \dots y_n$ ausdrücken, wenn man auf dem gedachten Weg von x_0 nach 0 geht, T^{-1} die inverse Substitution, so sind also in

$$TST^{-1}$$

sämtliche Substitutionen enthalten, die das Fundamentalsystem $u_1 u_2 \dots u_n$ bei allen Umläufen von $x = x_0$ aus erleidet, wenn man für S sämtliche Substitutionen einsetzt, die das Fundamentalsystem $y_1 \dots y_n$ bei allen Umläufen von $x = 0$ aus erleidet. Wir dürfen uns daher auf die Betrachtung der Substitutionen S beschränken.

Die Gesamtheit dieser Substitutionen S genießt nun eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit, die man als *Gruppeneigenschaft* bezeichnet. Man stellt nämlich ganz allgemein die folgende Definition auf¹⁾:

„Ein System \mathcal{G} von Elementen irgend welcher Art A_1, A_2, A_3, \dots heisst eine *Gruppe*, wenn es den folgenden Bedingungen genügt:

1) Durch irgend eine Vorschrift, welche als Composition oder Multiplication bezeichnet wird, leitet man in eindeutiger Weise aus zwei Elementen ein neues Element *desselben Systems* her, in Zeichen:

$$A_i A_k = A_h$$

2) Es ist stets

$$(A_i A_k) A_h = A_i (A_k A_h) = A_i A_k A_h$$

3) Aus $AA_i = AA_k$ und aus $A_i A = A_k A$ folgt $A_i = A_k$ “.

Aus der Art, wie man zwei nach einander anzuwendende Substitutionen componirt, folgt, dass die Gesamtheit der Substitutionen S den drei Bedingungen der vorstehenden Definition genügt. Wir nennen deshalb die Gesamtheit der Substitutionen S die *Gruppe der Differentialgleichung*.

Obwohl man nun jede Substitution beliebig oft wiederholen kann, ist es doch möglich, dass man im Ganzen nur eine endliche Anzahl verschiedener Substitutionen erhält. Hätte man z. B. nur einen einzigen singulären Punkt, also nur eine einzige Fundamentalsubstitution S , so kann man zwar durch deren beständige Wiederholung formal unendlich viele Substitutionen

$$S, SS, SSS, \dots$$

oder, wie man dafür symbolisch auch schreibt,

$$S, S^2, S^3, \dots$$

bilden. Wenn aber überdies noch eine gewisse Anzahl Wiederholungen von S , z. B. S^m , die identische Substitution ergäbe, so hätte man

1) Vergl. Weber, Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, Braunschweig 1891, S. 173.

doch nur eine endliche Anzahl, nämlich $m - 1$ verschiedene Substitutionen. In diesem Fall sprechen wir von einer *endlichen*, im entgegengesetzten von einer *unendlichen Gruppe der Differentialgleichung*.

Den Inhalt dieses Artikels fassen wir dahin zusammen:

Jedem singulären Punkt entspricht eine Fundamentalsubstitution. Die Gesamtheit der Fundamentalsubstitutionen und der aus ihnen durch Zusammensetzung abzuleitenden Substitutionen bildet die Gruppe der Differentialgleichung. Diese kann endlich oder unendlich sein.

45. Beispiele. Zwei Beispiele mögen den Begriff der *endlichen und unendlichen Gruppe* noch veranschaulichen, während wir später eine ganze Klasse von Differentialgleichungen hervorheben werden, bei denen die Gruppe endlich ist. (Art. 110.)

1. *Beispiel:* Die Functionen von x

$$y_1 = x - a, \quad y_2 = \sqrt{x - a},$$

wo a ein beliebiger, von Null verschiedener constanter Wert ist, sind linear unabhängig und können daher als Fundamentalsystem einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung gewählt werden, welche dann lautet

$$(15) \quad \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x - a, & 1, & 0 \\ \sqrt{x - a}, & \frac{1}{2\sqrt{x - a}}, & \frac{1}{4(x - a)^{3/2}} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(15^a) \quad (x - a)^2 y'' - \frac{1}{2} (x - a) y' + \frac{1}{2} y = 0.$$

Bei der regulären Stelle $x = 0$ haben wir das Fundamentalsystem

$$y_1 = x - a, \quad y_2 = \sqrt{x - a},$$

wo die Quadratwurzel mit einem beliebigen aber bestimmten der beiden Vorzeichen genommen ist (und natürlich auch, wie es die allgemeine Theorie voraussetzt, in der Umgebung von $x = 0$ in eine gewöhnliche Potenzreihe von x entwickelt werden kann). $x - a$ ist nun in der ganzen Ebene eindeutig, $\sqrt{x - a}$ multipliciert sich mit -1 beim Durchlaufen der zu $x = a$ gehörigen Fundamentalschleife und ist eindeutig in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet, das $x = a$ nicht enthält. Folglich führt ein ganz beliebiger Umlauf von $x = 0$ aus die Integrale y_1, y_2 entweder in sich selbst über, oder in

$$(16) \quad \begin{cases} \bar{y}_1 = y_1 \\ \bar{y}_2 = -y_2. \end{cases}$$

Abgesehen von der *identischen* Substitution, erhalten wir also nur die eine einzige

$$(17) \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Gruppe der Differentialgleichung (15) ist daher eine endliche.

2. Beispiel: Die Functionen

$$y_1 = x - a, \quad y_2 = (x - a) \log(x - a),$$

wo a ein beliebiger constanter, von Null verschiedener Wert ist und von der unendlich vieldeutigen Function $\log(x - a)$ etwa durch bestimmte Wahl ihres Wertes für $x = 0$ ein bestimmter Zweig fixiert sei, sind wieder linear unabhängig, wie man direkt leicht zeigen oder aus einem der Sätze im Anhang, Zu Kap. IV, (Satz 5), ablesen kann. y_1 ist in der ganzen Ebene *eindeutig*, y_2 in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet, welches den Punkt $x = a$ nicht enthält. Beim einmaligen Umlauf um $x = a$ in dem als positiv festgesetzten Sinn vermehrt sich $\log(x - a)$ um $2\pi i$ und vermindert sich bei dem entgegengesetzten Umlauf um dieselbe Grösse. Bei einem beliebigen Umlauf von $x = 0$ aus geht also $\log(x - a)$ über in

$$\log(x - a) + 2m\pi i,$$

wo m jeden positiven und negativen ganzzahligen Wert oder den Wert Null annehmen kann. Bei einem solchen beliebigen Umlauf gehen also y_1, y_2 in

$$(18) \quad \begin{cases} \bar{y}_1 = y_1 \\ \bar{y}_2 = 2m\pi i y_1 + y_2 \end{cases}$$

über, d. h. sie erleiden bei allen möglichen Umläufen die Substitutionen

$$(19) \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2m\pi i & 1 \end{pmatrix} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

y_1, y_2 sind nun ein Fundamentalsystem von Integralen für die Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x - a & 1 & 0 \\ (x - a) \log(x - a), & 1 + \log(x - a), & \frac{1}{x - a} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(20) \quad y''(x - a)^2 - y'(x - a) + y = 0,$$

deren Gruppe von den sämtlichen Substitutionen S (19) gebildet wird, also *unendlich* ist.

Kapitel VII.

Analytische Gestalt der Integrale bei einer singulären Stelle der Bestimmtheit¹⁾.

46. Anwendung der Fuchs'schen Methode. Nach der im Artikel 32 gegebenen Uebersicht haben wir jetzt die Aufgabe, die Integrale in der Umgebung einer *beliebigen Stelle der Bestimmtheit* zu untersuchen. Zunächst nämlich besitzen wir bei einer solchen ein Fundamentalsystem nur dann, wenn sie eine reguläre Stelle ist, oder allgemeiner, wenn die determinierende Gleichung n von einander verschiedene Wurzeln besitzt, deren jeder eine Reihe entspricht. Dass n solche reihenförmige Integrale linear unabhängig sind, folgt aus den im Anhang zusammengestellten Sätzen über linear unabhängige Functionen (s. Anhang, Zu Kap. IV, Satz 2 und 3).

Von diesen speziellen Fällen abgesehen, besitzen wir also in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit erst weniger als n Integrale, und es fragt sich daher: wie gelangen wir in diesem Fall zu einem Fundamentalsystem und welches ist die allgemeine analytische Gestalt seiner Elemente?

Wenn $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit ist, so kann unsere Differentialgleichung in die Gestalt

$$(1) \quad P(x, y) = x^n y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1(x) y^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{P}_n(x) y = 0$$

gesetzt werden, wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen sind, die sämtlich in der Umgebung U von $x = 0$ convergieren. Die zugehörige determinierende Function lautet, wenn wir die Unbekannte jetzt r nennen, nach Art. (7) Formel (9)

$$(2) \quad I(r) = r(r-1) \dots (r-n+1) + \mathfrak{P}_1(0) r(r-1) \dots (r-n+2) + \dots + \mathfrak{P}_n(0).$$

Die n Wurzeln der determinierenden Gleichung

$$r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n$$

1) Der Hauptinhalt dieses Kapitels stammt von Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66 (1866). Nr. 5 u. 6.

$$r_3 - r_2 - 1, \quad r_4 - r_2 - 1, \dots, r_\lambda - r_2 - 1$$

besitzt, und die folglich ein Integral

$$(3'') \quad u_3 \equiv x^{r_3 - r_2 - 1} \cdot \varphi_3(x)$$

hat, u. s. w. Endlich gelangt man zu einer Gleichung $(n - \lambda + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren abhängige Variable w heiße, deren determinierende Gleichung die nur noch aus einem Element bestehende Wurzelgruppe $g^{(2 - 1)}$

$$r_\lambda - r_{\lambda-1} - 1$$

besitzt, und die also ein Integral

$$w_\lambda \equiv x^{r_\lambda - r_{\lambda-1} - 1} \varphi_\lambda(x)$$

hat, wo φ_λ eine in U convergente gewöhnliche Potenzreihe mit von Null verschiedenem constanten Glied ist.

Für unsere vorgelegte Differentialgleichung (1) erhalten wir mithin entsprechend der Wurzelgruppe g der determinierenden Gleichung eine Gruppe Γ von Integralen

$$(8) \quad \begin{cases} y_1 \equiv y_1 \\ y_2 \equiv y_1 \int z_2 dx \\ y_3 \equiv y_1 \int z_2 dx \int u_3 dx \\ \dots \dots \dots \\ y_\lambda \equiv y_1 \int z_2 dx \int u_3 dx \dots \int w_\lambda dx, \end{cases}$$

wobei alle Integrationsconstanten willkürlich bleiben,

$$(9) \quad \begin{cases} y_1 \equiv x^{r_1} \varphi_1(x) \\ z_2 \equiv x^{r_2 - r_1 - 1} \varphi_2(x) \\ u_3 \equiv x^{r_3 - r_2 - 1} \varphi_3(x) \\ \dots \dots \dots \\ w_\lambda \equiv x^{r_\lambda - r_{\lambda-1} - 1} \varphi_\lambda(x), \end{cases}$$

und $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\lambda$ lauter in der Umgebung U gültige gewöhnliche Potenzreihen von x mit von Null verschiedenem constanten Anfangsglied sind.

Verfährt man so bei allen Wurzeln der determinierenden Gleichung, so erhält man n Integrale, welche in Gruppen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ der Gestalt (8) eingeteilt sind. Dass die Integrale einer Gruppe unter einander linear unabhängig sind, folgt aus der Art ihrer Erzeugung (s. Art. 30); dass aber auch zwischen den Integralen verschiedener Gruppen eine lineare Abhängigkeit unmöglich ist, die n Integrale also ein Fundamentalsystem bilden, werden wir im nächsten Artikel zugleich mit der analytischen Gestalt der Integrale (8) nach Ausführung der Integrationen erkennen.

Potenzen von x als in den übrigen. Hieraus folgt¹⁾, dass auch eine lineare Relation zwischen den Integralen verschiedener Gruppen möglich ist, dass also die n in die Gruppen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ eingeordnete Integrale ein Fundamentalsystem bilden.

Wir dehnen nunmehr den Begriff „eine Function verhält sich an einer gewissen Stelle z. B. $x=0$ bestimmt“, der bisher nur für Functionen in Reihengestalt definirt war, auf Functionen der Form

$$\Psi \equiv \psi_0 + \psi_1 \log x + \dots + \psi_\sigma \log^\sigma x \quad (\sigma = 0, 1, 2, \dots)$$

aus, wo $\psi_0 \psi_1 \dots \psi_\sigma$ sich bei $x=0$ bestimmt verhaltende sind, die nach Potenzen von x fortschreiten und sämtlich durch eine und derselben Potenz von x eindeutig werden²⁾, hören dann die Reihen $\psi_0 \psi_1 \dots \psi_\sigma$ bezw. zu den Exponenten

$$\varrho_0 \varrho_1 \dots \varrho_\sigma,$$

von denen derjenige mit dem kleinsten reellen Teil mit ϱ bezeichnet werde, so wollen wir auch von der Function Ψ sagen: sie gehört dem Exponenten oder zu der Zahl ϱ . Unter Umständen kommt noch darauf an, hervorzuheben, welche der Functionen $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_\sigma$ gehört oder — wenn mehrere von ihnen zu derselben Zahl ϱ gehören —, welches die letzte von diesen in der Reihenfolge $\psi_0 \psi_1 \dots \psi_\sigma$ ist. Ist dies etwa $\psi_{\gamma-1}$, während $\psi_\gamma, \psi_{\gamma+1}, \dots, \psi_\sigma$ zu Exponenten mit grösserem reellen Teil gehören, so sagen wir: Ψ gehört zu der γ ten Stelle stehenden Exponenten ϱ . Hiernach ist $x^{-\varrho} \cdot \Psi$ eine Function von $\log x$, deren Coefficienten gewöhnliche Potenzreihen in x sind, von denen mindestens eine mit einer von Null verschiedenen Constanten beginnt. Die Function $x^{-\varrho} \cdot \Psi$ wird demnach für $x=0$ nicht Null und — wenn sie unendlich wird — nur unendlich im Ausdruck

$$a_0 + a_1 \log x + \dots + a_\sigma \log^\sigma x,$$

wo $a_0 a_1 \dots a_\sigma$ Constanten sind. Die übrigen Glieder verschwinden nämlich bei $x=0$, weil bei positivem α

$$\lim_{(x=0)} x^\alpha \log^\beta x = 0$$

ist. Hierdurch rechtfertigt sich die Ausdehnung des Begriffes „eine Function verhält sich an einer gewissen Stelle bestimmt“ auf Functionen der Gestalt Ψ .

Mit Hülfe dieser Terminologie lässt sich nun der Inhalt des

1) S. Anhang, Zu Kap. IV, Satz 6.

2) Thomé nennt Integrale, die sich in diesem Sinne bestimmt verhalten, reguläre Integrale. (Crelles Journ. Bd. 75. (1873.) S. 266.)

letzten Artikel und damit das Hauptergebnis des gegenwärtigen Kapitels folgendermassen aussprechen:

Bei einer Stelle der Bestimmtheit $x = 0$ existiert ein Fundamentalsystem von Integralen, dessen sämtliche Elemente sich bei $x = 0$ bestimmt verhalten. Jeder Wurzelgruppe g ($r_1 r_2 \dots r_\lambda$) der zugehörigen determinierenden Gleichung entspricht nämlich eine Gruppe Γ von ebensoviel (λ) Integralen

$$y_\alpha \equiv \psi_{\alpha 1} + \psi_{\alpha 2} \log x + \dots + \psi_{\alpha \alpha} \log^{\alpha-1} x \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \lambda),$$

wo die $\psi_{\alpha \beta}$ bei $x = 0$ sich bestimmt verhaltende, in der ganzen Umgebung U des Punktes $x = 0$ convergente Reihen sind und zu Exponenten gehören, die sich von r_1 höchstens um ganze Zahlen unterscheiden.

Da aber sämtliche Integrale der Differentialgleichung sich durch die Elemente dieses Fundamentalsystems ausdrücken lassen, verhalten sich — in diesem noch etwas erweiterten Sinn — bei einer Stelle der Bestimmtheit die sämtlichen Integrale der Differentialgleichung bestimmt. Hierdurch rechtfertigt sich jetzt jene Benennung einer Stelle, deren zugehörige determinierende Gleichung die Ordnung der Differentialgleichung als Grad hat.

49. Zugehörigkeit der Integrale zu den Wurzeln der determinierenden Gleichung. Um zu erkennen, zu welchen Exponenten die sich bestimmt verhaltenden Integrale (8^a) gehören, müssen wir noch etwas näher auf die Ausführung der einzelnen Integrationen eingehen, welche

$$y_\alpha \equiv y_1 \int z_2 dx \int u_3 dx \dots \int s_{\alpha-1} dx \int v_\alpha dx \quad (\alpha = 2, 3, \dots, \lambda)$$

in die Gestalt

$$y_\alpha \equiv \psi_{\alpha 1} + \psi_{\alpha 2} \log x + \dots + \psi_{\alpha \alpha} \log^{\alpha-1} x$$

überführen. Hierzu bedürfen wir des Satzes¹⁾:

Wenn die bei $x = 0$ sich bestimmt verhaltende Function

$$\Psi \equiv \psi_0 + \psi_1 \log x + \dots + \psi_\sigma \log^\sigma x \quad (\sigma = 0, 1, 2, \dots)$$

zu dem an γ^{ter} Stelle stehenden Exponenten ϱ gehört, so verhält sich die Function

$$\int \Psi dx$$

bei $x = 0$ ebenfalls bestimmt und gehört zu dem Exponenten $\varrho + 1$.

Wenn $\varrho = -1$ ist, steht in $\int \Psi dx$ dieser Exponent ($\varrho + 1 = 0$) an $(\gamma + 1)^{\text{ter}}$, andernfalls an γ^{ter} Stelle.

Diesem Satz fügen wir den zweiten, welcher evident ist, hinzu:
Ist

$$\Psi \equiv \psi_0 + \psi_1 \log x + \dots + \psi_\sigma \log^\sigma x$$

eine bei $x = 0$ sich bestimmt verhaltende, zu dem an γ^{ter} Stelle stehenden Exponenten ϱ gehörige Function, ψ eine zu $\bar{\varrho}$ gehörige Reihe, welche sich bei $x = 0$ bestimmt verhält, so ist

$$\Psi \cdot \psi$$

eine wie Ψ gestaltete Function, die zu dem an γ^{ter} Stelle stehenden Exponenten $\varrho + \bar{\varrho}$ gehört.

Nun gehört in dem Integral y_α nach (9)

$$v_\alpha \text{ zu } r_\alpha - r_{\alpha-1} - 1,$$

also

$$\int v_\alpha dx \text{ zu } r_\alpha - r_{\alpha-1} - 1 + 1$$

und zwar an erster oder zweiter Stelle, je nach dem $r_\alpha \neq r_{\alpha-1}$ oder $r_\alpha = r_{\alpha-1}$. Mit derselben Massgabe gehört

$s_{\alpha-1} \int v_\alpha dx$ zu $r_\alpha - r_{\alpha-1} - 1 + 1 + r_{\alpha-1} - r_{\alpha-2} - 1 \equiv r_\alpha - r_{\alpha-2} - 1$ an erster oder zweiter Stelle,

$\int s_{\alpha-1} dx \int v_\alpha dx$ zu $r_\alpha - r_{\alpha-1} - 1 + 1 + r_{\alpha-1} - r_{\alpha-2} - 1 + 1 \equiv r_\alpha - r_{\alpha-2}$ an erster Stelle, wenn $r_\alpha \neq r_{\alpha-1}$, an zweiter Stelle, wenn $r_\alpha = r_{\alpha-1} \neq r_{\alpha-2}$, an dritter Stelle, wenn $r_\alpha = r_{\alpha-1} = r_{\alpha-2}$ u. s. w.

Folglich gehört endlich

$$y_\alpha \equiv y_1 \int z_2 dx \int \dots \int s_{\alpha-1} dx \int v_\alpha dx$$

zu

$$r_\alpha - r_{\alpha-1} - 1 + 1 + r_{\alpha-1} - r_{\alpha-2} - 1 + 1 + \dots + r_1 \equiv r_\alpha$$

und zwar an γ^{ter} Stelle, wenn

$$r_\alpha = r_{\alpha-1} = r_{\alpha-2} = \dots = r_{\alpha-\gamma+1} \neq r_{\alpha-\gamma}.$$

Wir haben daher das Resultat:

Die Integrale (8^a) der Gruppe Γ gehören der Reihe nach bezw. zu den Wurzeln r_1, r_2, \dots, r_n der Wurzelgruppe g der determinierenden Gleichung, und zwar gehört y_α zu der an γ^{ter} Stelle stehenden Wurzel r_α , wenn $r_\alpha = r_{\alpha-1} = \dots = r_{\alpha-\gamma+1} \neq r_{\alpha-\gamma}$ ist. Die n Elemente des in die Gruppen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ eingetheilten Fundamentalsystems y_1, y_2, \dots, y_n gehören bezw. zu den Wurzeln r_1, r_2, \dots, r_n der determinierenden Gleichung.

Um dies in den Formeln sichtbar zu machen, können wir auch

$$\varphi_{\alpha\beta} \equiv x^{r_\alpha} \varphi_{\alpha\beta} \quad \left(\begin{matrix} \alpha = 1, 2, \dots, \lambda \\ \beta = 1, 2, \dots, \alpha \end{matrix} \right)$$

setzen, wo die $\varphi_{\alpha\beta}$ gewöhnliche Potenzreihen von x sind und $\varphi_{\alpha\gamma}$ in der Reihenfolge $\varphi_{\alpha 1}, \varphi_{\alpha 2}, \dots, \varphi_{\alpha \alpha}$ die letzte ist, welche mit einer von

Jedes in die Gruppe Γ gehörige Integral, welches zu dem an γ^{ter} Stelle stehenden Exponenten r_α gehört, ist in dem Integral y_α , welches zu der an γ^{ter} Stelle stehenden Wurzel r_α der determinierenden Gleichung gehört, enthalten. Wir nennen aus diesem Grund das Integral y_α , wenn die willkürlichen Constanten desselben unbestimmt bleiben, das *allgemeinste zu der an γ^{ter} Stelle stehenden Wurzel r_α gehörige Integral der Gruppe Γ .*

Ebenso leicht beweist man, immer mit denselben Hilfsmitteln, den Satz:

Jedes in die Gruppe Γ gehörige Integral gehört zu einem der Exponenten $r_1 r_2 \dots r_k$, welcher höchstens an sovielter Stelle steht, als die Multiplicität der betreffenden Wurzel beträgt.

51. Verzweigung der Integrale bei $x = 0$; Umlaufsrelationen.

Wir kommen nunmehr zu der für das Studium der Integrale in der Umgebung von $x = 0$ wichtigsten, nämlich zu der Frage, wie sich dieselben ändern, wenn x einen Umlauf um den singulären Punkt $x = 0$ beschreibt, aber dabei ganz innerhalb der Umgebung U desselben bleibt.

Wenn hierbei von einer *Änderung* der Integrale $y_1 y_2 \dots y_n$ die Rede ist, während doch die vieldeutigen Ausdrücke ((8), (8*)) derselben schon sämtliche Werte enthalten, welche diese Integrale innerhalb U überhaupt besitzen, so ist dies folgendermassen zu verstehen. Man denkt sich für einen nicht singulären Wert $x = x_0$ in der Umgebung U eines der Wertsysteme, welches die Integrale $y_1 \dots y_n$ für $x = x_0$ anzunehmen fähig sind, fixiert und sondert dadurch aus jeder der mehrdeutigen Functionen y einen *bestimmten Zweig* aus, der *eindeutig* bleibt, solange x von x_0 nach den Punkten von U Wege beschreibt, welche $x = 0$ nicht einschliessen. Macht nun aber x von x_0 aus einen Umlauf um $x = 0$, etwa in Form einer Kreisperipherie um den Mittelpunkt $x = 0$, so ändern sich in der That jene Zweige im Allgemeinen, und dies ist unter dem obigen kurzen Ausdruck zu verstehen. Man nennt deshalb die Art der Änderung auch *die Verzweigung der Integrale um den Punkt $x = 0$.*

Eindeutige Integrale, welche die Gestalt einer gewöhnlichen Potenzreihe von x haben, ändern sich bei einem Umlauf um $x = 0$ gar nicht. Nicht eindeutige Integrale in Reihenform, wie

$$y_1 = x^{r_1} \varphi_{11}(x),$$

multiplizieren sich nur mit einer Constanten. Denn φ_{11} ist eindeutig; setzt man aber

$$x^{r_1} = e^{r_1 \log x},$$

so multipliciert sich x^{r_1} , da $\log x$ bei dem Umlauf um $x = 0$ in $\log x + 2\pi i$ übergeht, mit $e^{2r_1\pi i}$. Die logarithmen-behafteten Integrale sind aber im Allgemeinen in doppelter Weise mehrdeutig.

Ein beliebiges Integral der Gruppe Γ sei nämlich wieder

$$y_\alpha = x^{r_\alpha} [\varphi_{\alpha 1} + \varphi_{\alpha 2} \log x + \dots + \varphi_{\alpha \alpha} \log^{\alpha-1} x] \\ \equiv \psi_{\alpha 1} + \psi_{\alpha 2} \log x + \dots + \psi_{\alpha \alpha} \log^{\alpha-1} x,$$

worin wir uns nun die willkürlichen Constanten in irgend einer Weise fixiert denken. Bei dem gedachten Umlauf gehe diese Function in \bar{y}_α über, welche wieder ein Integral der Differentialgleichung (1) ist, da man ja x nur innerhalb der Umgebung U sich bewegen liess und das Integral y_α für diesen ganzen Bereich definiert ist. Nun ändern sich bei diesem Umlauf die eindeutigen Functionen $\varphi_{\alpha\beta}$ gar nicht; dagegen geht

$$\log x \quad \text{in} \quad \log x + 2\pi i \\ x^{r_\alpha} \quad \text{in} \quad x^{r_\alpha} \cdot e^{2r_\alpha\pi i}$$

über. Setzen wir zur Abkürzung, da $r_1 r_2 \dots r_\lambda$ sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, also die folgenden Exponentialgrössen alle einander gleich sind,

$$(10) \quad e^{2r_1\pi i} \cdot e^{2r_2\pi i} \cdot \dots \cdot e^{2r_\alpha\pi i} \cdot \dots \cdot e^{2r_\lambda\pi i} = \omega_1,$$

so hat man also

$$(11) \quad \omega_1^{-1} y_\alpha = \psi_{\alpha 1} + 2\pi i \psi_{\alpha 2} + (2\pi i)^2 \psi_{\alpha 3} + (2\pi i)^3 \psi_{\alpha 4} + \dots + (2\pi i)^{\alpha-1} \psi_{\alpha \alpha} \\ + \log x [\psi_{\alpha 2} + 2(2\pi i) \psi_{\alpha 3} + 3(2\pi i)^2 \psi_{\alpha 4} + \dots + (\alpha-1)(2\pi i)^{\alpha-2} \psi_{\alpha \alpha}] \\ + \log^2 x \left[\psi_{\alpha 3} + \binom{3}{2} 2\pi i \psi_{\alpha 4} + \dots + \binom{\alpha-1}{2} (2\pi i)^{\alpha-3} \psi_{\alpha \alpha} \right] \\ + \dots \dots \dots \\ + \log^{\alpha-2} x [\psi_{\alpha, \alpha-1} + (\alpha-1) 2\pi i \psi_{\alpha \alpha}] \\ + \log^{\alpha-1} x \psi_{\alpha \alpha}.$$

Hier ist auf der rechten Seite der Complex der ersten Glieder in jeder Zeile gerade y_α . Der übrig bleibende Teil ist ein in die Gruppe Γ gehöriges Integral, welches, wenn y_α zu der an erster Stelle stehenden Wurzel r_α gehört, also $r_\alpha \neq r_{\alpha-1}$ ist, zu einer der Wurzeln $r_{\alpha-1}, r_{\alpha-2}, \dots, r_1$, oder, wenn $r_\alpha = r_{\alpha-1} = \dots = r_{\alpha-\gamma+1} \neq r_{\alpha-\gamma}$ zu der an $(\gamma-1)^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Wurzel r_α gehört, also in beiden Fällen nach dem vorangehenden Artikel durch die Integrale $y_1, y_2 \dots y_{\alpha-1}$ allein ausdrückbar ist. Aus (11) ergibt sich daher

$$(12) \quad \bar{y}_\alpha = \omega_{\alpha 1} y_1 + \omega_{\alpha 2} y_2 + \dots + \omega_{\alpha, \alpha-1} y_{\alpha-1} + \omega_1 y_\alpha,$$

wo die $\omega_{\alpha\beta}$ Constanten sind, ω_1 den in (10) angegebenen, von Null verschiedenen Wert hat.

Die Relationen, welche zwischen den Integralen $y_1 y_2 \dots y_n$ und den durch den Umlauf daraus erzielten $\bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_n$ bestehen, oder — wie wir kurz sagen wollen — *die Umlaufsrelationen des Fundamentalsystems $y_1 y_2 \dots y_n$ in Bezug auf $x = 0$* lauten also

$$(13) \quad \begin{cases} \bar{y}_1 & \equiv \omega_1 y_1 \\ \bar{y}_2 & \equiv \omega_{21} y_1 + \omega_2 y_2 \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{y}_\lambda & \equiv \omega_{\lambda 1} y_1 + \omega_{\lambda 2} y_2 + \dots + \omega_{\lambda, \lambda-1} y_{\lambda-1} + \omega_\lambda y_\lambda \\ \bar{y}_{\lambda+1} & \equiv \omega_2 y_{\lambda+1} \\ \bar{y}_{\lambda+2} & \equiv \omega_{\lambda+2, 1} y_{\lambda+1} + \omega_2 y_{\lambda+2} \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

wenn $r_{\lambda+1}, r_{\lambda+2}, \dots, r_{\lambda+\lambda_1}$ eine zweite Wurzelgruppe y_1 der determinierenden Gleichung bedeutet,

$$\omega_2 = e^{2r_{\lambda+1}\pi i} : \dots : e^{2r_{\lambda+\lambda_1}\pi i}$$

gesetzt wird, u. s. w. —

Dass die n durch den Umlauf aus $y_1 y_2 \dots y_n$ erzeugten Integrale $\bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_n$ abermals ein Fundamentalsystem bilden, ist leicht zu sehen. Die Determinante dieser n Functionen ist nämlich nach dem Determinanten-Multiplications-Theorem das Produkt der Determinante der $y_1 y_2 \dots y_n$ und der aus den $\omega_{\alpha\beta}$ und $\omega_1, \omega_2, \dots$ gebildeten Substitutionsdeterminante¹⁾. Die erstere ist $\neq 0$, weil $y_1 y_2 \dots y_n$ ein Fundamentalsystem bilden, die letztere hat den Wert

$$\omega_1^{\lambda_1} \cdot \omega_2^{\lambda_2} \dots = 0.$$

Folglich bilden auch $\bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen.

Als Hauptergebnis dieses Artikels sprechen wir aus:

Bei einem Umlauf der unabhängigen Variablen um eine singuläre Stelle der Bestimmtheit geht jedes Element des in die Gruppen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ eingetheilten Fundamentalsystems $y_1 y_2 \dots y_n$ in eine lineare homogene Function von sich selbst und den ihm in seiner Gruppe vorangehenden Integralen über. Diese n Functionen bilden wieder ein Fundamentalsystem von Integralen.

1) Vergl. Baltzer, Theorie u. Anwend. d. Det. 5. Aufl. Leipzig 1881. § 6. 1. S. 48 ff.

Die Berechnung von $\psi_{\alpha, \alpha-1}$ zeigt, dass dies, abgesehen von dem soeben gefundenen $\psi_{\alpha\alpha}$, linear und homogen durch $\psi_{\alpha-1, \alpha-2}$, $\psi_{\alpha-2, \alpha-3}$ ausdrückbar ist, und mit Berücksichtigung des für $\psi_{\alpha\alpha}$ gefundenen Ergebnisses und des Umstandes, dass Analoges gilt, sobald man α durch $\alpha-1$, $\alpha-2$, u. s. w. ersetzt, ergibt sich: $\psi_{\alpha, \alpha-1}$ ist durch jedes der Paare

$$\psi_{\alpha-1, \alpha-2}, \quad \psi_{\alpha-2, \alpha-3}$$

$$\psi_{\alpha-2, \alpha-3}, \quad \psi_{\alpha-3, \alpha-4}$$

$$\psi_{21}, \quad \psi_{11}$$

linear und homogen ausdrückbar. U. s. w.

Allgemein ergibt sich so schrittweise das Resultat:

$\psi_{\alpha\beta}$ ist eine lineare homogene Function von nur $\alpha - \beta + 1$ anderen Functionen ψ , die im zweiten Index unter einander übereinstimmen, zwar so, dass $\psi_{\alpha\beta}$ nur von

$$\psi_{\alpha-k, \beta-k}, \quad \psi_{\alpha-k-1, \beta-k}, \dots, \psi_{\beta-k, \beta-k}$$

abhängt, wo k einen beliebigen der Werte $1, 2, \dots, \beta - 1$ bedeutet. In letzter Hand ist also $\psi_{\alpha\beta}$ nur von

$$\psi_{11}, \quad \psi_{21}, \dots, \psi_{\alpha-\beta+1, 1}$$

abhängig.

53. Grad der Gruppen-Integrale im Logarithmus. Eine Reihe von Bemerkungen soll sich endlich noch auf den Grad beziehen, bis zu welchem $\log x$ in den einzelnen Integralen einer Gruppe aufsteigt.

Wie wir im Artikel 48 sahen, steigt in dem α^{ten} Integral y_α einer Gruppe Γ der Logarithmus höchstens und im Allgemeinen wirklich bis zur $(\alpha-1)^{\text{ten}}$ Potenz ($\alpha = 1, 2, \dots, \lambda$) auf. Es kann aber in speziellen Fällen eintreten, dass dieser Grad nicht erreicht wird, dass also eine oder mehrere der Functionen $\psi_{\alpha\beta}$ ($\beta = \alpha, \alpha-1, \dots$) identisch Null sind, wie man auch die Integrationsconstanten bestimmt. Aus den Betrachtungen in Artikel 50 folgt dann, dass der Grad der Integrale $y_1 y_2 \dots y_\lambda$ (worin alle Constanten unbestimmt bleiben) in $\log x$ beim Fortschreiten von y_1 zu y_λ jedenfalls nie abnimmt. Andererseits ergibt sich aus dem Satz am Schluss des vorigen Artikels, dass der Grad dieser Integrale in $\log x$ von Integral zu Integral höchstens um die Einheit zunehmen kann. Wir bemerken daher zunächst:

Der Grad in $\log x$, bis zu welchem die allgemeinsten zu den Wurzeln $r_1 r_2 \dots r_\lambda$ gehörigen Integrale $y_1 y_2 \dots y_\lambda$ thatsächlich aufsteigen, nimmt in dieser Folge nie ab und von Integral zu Integral höchstens um die Einheit zu.

allgemeinsten zu $r_2 \dots r_2$ gehörigen Integralen der Logarithmus thatsächlich nicht bis zu der Potenz aufsteigt, die er höchstens erreichen kann. Es ist aber möglich, dass bei besonderer Bestimmung der in diesen allgemeinsten Integralen noch enthaltenen willkürlichen Constanten der Grad derselben in $\log x$ noch weiter zu reducieren ist. Verschwindet z. B. in dem zu r_2 gehörigen Integral y_2 der Logarithmus nicht, so enthält nach der ersten Bemerkung dieses Artikels auch das allgemeinste zu r_3 gehörige Integral y_3 den Logarithmus mindestens in der ersten Potenz. Ergeben dann aber die Bedingungen des Kap. II, dass zu r_3 ein logarithmenfreies Integral in Reihenform gehört, so muss dieses, wenn $r_3 \neq r_2$, nach Artikel 49 in y_3 enthalten sein. In dem allgemeinsten zu r_3 gehörigen Integral y_3 lässt sich also durch geeignete Verfügung über die willkürlichen Constanten der Grad des Logarithmus auf Null reducieren.

Diese Überlegung führt uns zu dem Wunsch nach einem Fundamentalsystem, das aus lauter möglichst einfach gebauten Integralen besteht, d. h. aus solchen, welche den Logarithmus in möglichst niedrigen Potenzen enthalten. Und weil sich dieser Wunsch mit Hilfe der bisher benutzten Methode nicht leicht befriedigen lässt, nehmen wir — auch in Rücksicht auf weitere Gesichtspunkte — die Untersuchung der Integrale bei einer singulären Bestimmtheitsstelle im folgenden Kapitel noch einmal in anderer Weise auf. Das gegenwärtige Kapitel beschliessen wir mit der Betrachtung eines Specialfalles, der die allgemeine Untersuchung illustriert.

54. Differentialgleichungen mit einer einzigen singulären Stelle (der Bestimmtheit) im Endlichen. Die schon im Artikel 10 als 2. Beispiel benutzte Differentialgleichung

$$(15) \quad x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0,$$

wo $a_1 a_2 \dots a_n$ Constanten sind, besitzt $x = 0$ als einzige singuläre Stelle im Endlichen, und diese ist Stelle der Bestimmtheit. Die Umgebung U derselben deckt sich also — gerade wie bei den linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten — mit dem ganzen Gebiet der Differentialgleichung, nämlich mit der gesamten x -Ebene.

Wir fanden damals: wenn r_1 eine Wurzel der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung von (15)

$$(16) \quad a_{rr} = r(r-1) \dots (r-n+1) \\ + a_1 r(r-1) \dots (r-n+2) + \dots + a_n = 0$$

ist, so genügt x^{r_1} der Differentialgleichung (15). Sind die n Wurzeln r_1, r_2, \dots, r_n der Gleichung (16) sämtlich verschieden, so bilden die n Integrale

$$x^{r_1}, x^{r_2}, \dots, x^{r_n}$$

ein Fundamentalsystem, wie unmittelbar einzusehen ist, gleichviel ob dabei mehrere der Wurzeln r_1, \dots, r_n eine Gruppe constituieren oder nicht. Ist das Erstere der Fall, so haben wir also hier ein Beispiel dafür, dass in einer ganzen Gruppe von Integralen der Logarithmus fehlt.

Sind dagegen nicht alle Wurzeln r_1, r_2, \dots, r_n verschieden, sondern z. B.

$$r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_\gamma \neq r_{\gamma+1},$$

so werden die Integrale $x^{r_1}, x^{r_2}, \dots, x^{r_\gamma}$ identisch; aber nach der allgemeinen Theorie giebt es dann ein Integral, welches zu der an zweiter, eines, welches zu der an dritter, u. s. w., endlich eines, welches zu der an γ^{ter} Stelle stehenden Wurzel r_1 gehört. Diese finden wir durch Anwendung der Fuchs'schen Methode. Wir substituieren in (15)

$$y = x^{r_1} \int z dx$$

und erhalten dadurch nach Artikel 29 und 46 für z die Gleichung

$$\begin{aligned} (17) \quad 0 = & z^{(n-1)} x^n x^{r_1} \\ & + z^{(n-2)} \left[\binom{n}{1} x^n r_1 x^{r_1-1} + a_1 x^{n-1} x^{r_1} \right] \\ & + z^{(n-3)} \left[\binom{n}{2} x^n r_1 (r_1 - 1) x^{r_1-2} + \binom{n-1}{1} a_1 x^{n-1} r_1 x^{r_1-1} + a_2 x^{n-2} x^{r_1} \right] \\ & + \dots \\ & + z \left[\binom{n}{1} x^n r_1 \dots (r_1 - n + 2) x^{r_1-n+1} + \dots + a_{n-1} x x^{r_1} \right], \end{aligned}$$

welche nach Fortlassung des Faktors x^{r_1+1} wieder die Form

$$(18) \quad x^{n-1} z^{(n-1)} + a'_1 x^{n-2} z^{(n-2)} + \dots + a'_{n-1} z = 0$$

erhält, wo $a'_1, a'_2, \dots, a'_{n-1}$ Constanten sind. Die Wurzeln der zugehörigen determinierenden Gleichung sind nach Artikel 46

$$r_2 = r_1 - 1, \quad r_3 = r_1 - 1, \dots, r_\gamma = r_1 - 1, \dots, r_n = r_1 - 1,$$

deren $\gamma - 1$ erste den Wert -1 haben. Folglich ist

$$z = x^{-1}$$

ein Integral von (18) und

$$x^{r_1} \int x^{-1} dx = C_0 x^{r_1} + x^{r_1} \log x$$

35. 36), so erkennt man, dass das hier ermittelte Fundamentalsystem in das dort gefundene durch die Substitution

$$(21) \quad x = c^{x'}$$

und umgekehrt jenes in dieses durch die inverse Substitution

$$(21^a) \quad x = \log x'$$

übergeht. Da aber durch ein Fundamentalsystem von Integralen eine Differentialgleichung selbst bestimmt ist, so folgt, dass durch die Substitution (21) die hier betrachtete Differentialgleichung in eine Differentialgleichung mit constanten Coefficienten

$$(22) \quad y^{(n)} + a_1' y^{(n-1)} + \dots + a_n' y = 0$$

und diese durch (21^a) in eine Differentialgleichung der Gestalt (15) übergeht. Die *charakteristische Gleichung* der Differentialgleichung mit constanten Coefficienten (22) ist identisch mit der zu $x=0$ gehörigen *determinierenden Gleichung* von (15), da ihre Wurzeln übereinstimmen.

Diese Ergebnisse sind leicht direkt zu verificieren.

Kapitel VIII.

Recursionsformeln der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen bei einer Stelle der Bestimmtheit.

55. Aufstellung der zu behandelnden Aufgaben. Im vorigen Kapitel hat uns die Fuchs'sche Methode gelehrt, dass bei einer singulären Stelle der Bestimmtheit $x=0$ die Integrale die Gestalt ganzer Functionen von $\log x$ haben, welche sich bei $x=0$ bestimmt verhalten. Wir fanden ein in Gruppen derart eingetheiltes Fundamentalsystem von Integralen, dass die Elemente einer Gruppe beziehentlich zu den einzelnen Wurzeln einer Wurzelgruppe der determinierenden Gleichung gehörten.

So wichtig und interessant diese Ergebnisse sind, lassen sie doch noch nach einigen Richtungen hin eine Ergänzung wünschen. Zunächst muss bemerkt werden, dass die praktische Durchführung jenes Verfahrens zur Herstellung der logarithmenbehafteten Integrale sich im Allgemeinen äusserst umständlich gestalten wird, weil es dabei gilt, unendliche Reihen mit einander zu multiplicieren, dann wieder zu integrieren u. s. w. Einen zweiten Punkt haben wir schon am Schluss der allgemeinen Untersuchung des vorigen Kapitels (Art. 53) berührt: Wir wünschen ein Fundamentalsystem, in dessen Elementen der Logarithmus nur bis zu einer möglichst niedrigen Potenz aufsteigt. Ein solches muss zwar in dem im vorigen Kapitel aufgestellten Fundamentalsystem enthalten sein. Allein bei der Art, wie die willkürlichen Constanten der einzelnen Elemente desselben in diese eingehen, dürfte es sehr schwierig sein, unmittelbar aus jenem das einfachste Fundamentalsystem zu entwickeln. Hiermit hängt endlich noch zusammen, dass wir die Umlaufsrelationen der Integrale des vorigen Kapitels nur in unvollkommener Weise angeben konnten: wir kennen ja nicht die Werte der in ihnen auftretenden Coefficienten $\omega_{\alpha\beta}$ (s. Formel (12) Artikel 51). Die vollständige Beherrschung der Umlaufsrelationen ist aber für das Studium der Integrale bei den singulären Punkten von grundlegender Bedeutung.

Um diesen verschiedenen Wünschen gerecht zu werden, nehmen

wir die Untersuchung noch einmal auf, indem wir von dem gesamten Inhalt des vorangehenden Kapitels lediglich den die allgemeine analytische Gestalt der Integrale bei einer singulären Stelle der Bestimmtheit feststellenden Teil, d. h. den Inhalt der Artikel 46—48 benutzen und das zu behandelnde Problem folgendermassen fassen:

Man versucht der Differentialgleichung

$$(1) \quad P(x, y) \equiv p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y \\ \equiv x^n \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

— wo die \mathfrak{P} gewöhnliche Potenzreihen von x sind, $\mathfrak{P}_0(0) \equiv 0$, — die also bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat, durch ein Integral der Gestalt

$$(2) \quad y \equiv \psi_0 + \binom{\sigma}{1} \psi_{\sigma-1} \log x + \binom{\sigma}{2} \psi_{\sigma-2} \log^2 x + \dots + \psi_0 \log^\sigma x$$

zu genügen, in welchem

$$\psi_0 \equiv \sum_{(s)} c_s x^s, \quad \psi_1 \equiv \sum_{(s)} c'_s x^s, \dots, \psi_\sigma \equiv \sum_{(s)} c_s^{(\sigma)} x^s$$

($s = \alpha, \alpha + 1, \dots$)

nach Potenzen von x fortschreitende Reihen sind, deren Exponenten sich sämtlich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden, und fragt: wie sind die Coefficienten dieser Reihen und die Zahl α zu bestimmen, damit Gleichung (1) durch (2) identisch erfüllt wird? Convergiere die so bestimmten Reihen ψ und welche Coefficienten bleiben in ihnen willkürlich?

Man erkennt, dass diese Fassung des Problems sich genau an diejenige anschliesst, welche unserer Untersuchung in Kap. I, II, III zu Grunde lag, und für $\sigma = 0$ geradezu in jene übergeht. Nennen wir noch zur Abkürzung ein Integral, in welchem der Logarithmus thatsächlich bis zur σ^{ten} Potenz aufsteigt, ein *Integral* $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ *Stufe*, so können wir auch sagen: wie wir dort das allgemeinste Integral erster Stufe einer Gruppe aufgestellt haben, wollen wir nunmehr das *allgemeinste Integral* $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ *Stufe* einer Gruppe aufstellen.

56. Allgemeiner Satz über die Herleitung mehrerer logarithmenbehafteter Integrale aus einem solchen. Wir stellen zunächst einen allgemeinen Satz voran, der sich auf Integrale der hier auftretenden Form — ganze Functionen von $\log x$ — anwenden lässt¹⁾.

1) Der Satz und diese Anwendung desselben rührt von Koehler her; vergl. Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 33. (1888.) S. 231 ff. — Ein Gegenstück zu dem obigen ist der folgende, ebenso leicht zu beweisende und ähnlicher Anwendungen fähige Satz:

Wenn die Differentialgleichung

$$(3) \quad Q(x, y) \equiv q_0 y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \dots + q_n y = 0,$$

deren Coefficienten beliebige Functionen von x , aber von einer andern Grösse u unabhängig sind, ein Integral der Gestalt

$$y \equiv f(x, u)$$

besitzt, wo f eine beliebige Function von x und u ist, die auch nach u differenziert werden kann, so genügen ihr auch die Functionen

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial u^2}, \dots$$

Ist nämlich

$$Q(x, f(x, u)) = 0,$$

so ist auch

$$\frac{\partial^2 Q(x, f(x, u))}{\partial u^2} = 0 \quad (u = 1, 2, \dots).$$

Da aber die Coefficienten von $Q(x, y)$ von u unabhängig sein sollten, ist

$$\frac{\partial^2 Q(x, f(x, u))}{\partial u^2} \equiv Q\left(x, \frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial u^2}\right)$$

und daher

$$Q\left(x, \frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial u^2}\right) = 0.$$

Sind nun die Coefficienten von (3) *eindeutige* Functionen von x und besitzt die Gleichung ein Integral

$$y = F(x, \log x),$$

wo F eine ganze rationale Function von $\log x$ ist, deren Coefficienten, abgesehen von einem allen gemeinsamen Faktor x^r , eindeutig sind, so wird die Gleichung auch durch

$$y = F(x, \log x + u)$$

befriedigt, wenn u eine ganz beliebige unbestimmte Grösse bedeutet¹⁾.

Setzt man nämlich $F(x, \log x)$ für y in den Differentialausdruck

Wenn die Differentialgleichung

$$P(x, u; y) \equiv p_0(x, u) y^{(n)} + p_1(x, u) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x, u) y = 0,$$

deren Coefficienten beliebige Functionen von x und u sind, die nach u differenziert werden können, ein von u unabhängiges Integral

$$y \equiv f(x)$$

besitzt, so genügt dieses auch allen durch partielle Differentiation der Coefficienten nach u aus $P = 0$ hervorgehenden Differentialgleichungen.

1) Vergl. Koehler, Über die Integration mittelst expliciter Functionen derjenigen hom. lin. Diffgl. u. s. w., In.-Diss., Heidelberg, 1879. S. 8.

57. Substitution des logarithmenbehafteten Integrals in die Differentialgleichung. Um nun die in Artikel 55 geforderte Berechnung der Reihen

$$\psi_0 \psi_1 \dots \psi_\sigma$$

des logarithmenbehafteten Integrals y auszuführen, werden wir dieses in die Differentialgleichung (1) substituieren und dadurch für jede dieser Reihen eine Recursionsformel finden. Da wir aber nach Art. 56 aus dem allgemeinsten Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe

$$y = \psi_\sigma + \binom{\sigma}{1} \psi_{\sigma-1} \log x + \dots + \psi_0 \log^\sigma x$$

ein Integral σ^{ter} Stufe

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial y}{\partial \log x} = \psi_{\sigma-1} + \binom{\sigma-1}{1} \psi_{\sigma-2} \log x + \dots + \psi_0 \log^{\sigma-1} x$$

ableiten können, welches in dieselbe Gruppe wie y gehört und daher in dem allgemeinsten Integral σ^{ter} Stufe enthalten sein, d. h. aus diesem jedenfalls durch Specialisierung seiner willkürlichen Constanten hervorgehen muss, so wollen wir annehmen, dass wir das allgemeinste Integral σ^{ter} Stufe bereits kennen, wenn wir uns an die Aufstellung des allgemeinsten Integrals $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe begeben. Diese Annahme führt also schliesslich auf das allgemeinste Integral erster Stufe zurück, welches wir ja in der That in Kap. I, II, III schon ermittelt haben. Hiernach haben wir also nur noch die Reihe ψ_σ zu berechnen und festzustellen, welche Beschränkungen den willkürlichen Constanten des allgemeinsten Integrals σ^{ter} Stufe aufzuerlegen sind, damit es die partielle Ableitung nach $\log x$ von dem allgemeinsten Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe wird.

Substituiert man nun y in (1), so folgt

$$(7) \quad P(x, y) = P(x, \psi_0) + \binom{\sigma}{1} P(x, \psi_{\sigma-1} \log x) + \dots + P(x, \psi_0 \log^\sigma x)$$

soll identisch Null sein. Hierzu ist notwendig, dass, wenn (7) nach Potenzen von $\log x$ geordnet wird, die einzelnen Coefficienten der Potenzen von $\log x$ für sich identisch verschwinden.¹⁾ Da aber die Reihe ψ_σ in den mit Potenzen von $\log x$ multiplicierten Teilen des Ausdrucks (7) gar nicht vorkommt, so braucht man nur den logarithmenfreien Teil aufzusuchen und gleich Null zu setzen.

Bezeichnet man hierzu für den Augenblick den logarithmenfreien Teil eines von x und $\log x$ abhängigen Ausdrucks $f(x, \log x)$ durch

$$[f(x, \log x)],$$

so ist

1) Vergl. Anhang, Zu Kap. IV, Satz 5.

$$(8) [P(x, y)] \equiv [P(x, \psi_0)] + \binom{\sigma}{1} [P(x, \psi_{\sigma-1} \log x)] + \dots + [P(x, \psi_0 \log^\sigma x)].$$

Da aber nach (1)

$$[P(x, v)] \equiv x^n \mathfrak{P}_0[v^{(n)}] + x^{n-1} \mathfrak{P}_1[v^{(n-1)}] + \dots + \mathfrak{P}_n[v],$$

so hat man zur Berechnung der einzelnen Teile von (8) zunächst die logarithmenfreien Teile von

$$\psi_\sigma, \psi_{\sigma-1} \log x, \dots, \psi_0 \log^\sigma x$$

und ihren n ersten Ableitungen zu ermitteln.

ψ_σ und alle seine Ableitungen enthalten überhaupt keine Logarithmen; also ist

$$(9) [\psi_\sigma] : \psi_\sigma, [\psi_\sigma'] : \psi_\sigma', \dots, [\psi_\sigma^{(n)}] : \psi_\sigma^{(n)}$$

und

$$[P(x, \psi_\sigma)] : P(x, \psi_\sigma).$$

Für $\psi_{\sigma-1} \log x$ und seine n ersten Ableitungen erhält man bezw. die logarithmenfreien Teile

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} [\psi_{\sigma-1} \log x] : 0 \\ [(\psi_{\sigma-1} \log x)'] : \frac{\psi_{\sigma-1}}{x} \\ [(\psi_{\sigma-1} \log x)''] : -\frac{\psi_{\sigma-1}}{x^2} + \frac{2}{x} \psi_{\sigma-1}' \\ [(\psi_{\sigma-1} \log x)'''] : \frac{2}{x^3} \psi_{\sigma-1} - \frac{3}{x^2} \psi_{\sigma-1}' + \frac{3}{x} \psi_{\sigma-1}'' \\ \dots \dots \dots \\ [(\psi_{\sigma-1} \log x)^{(n)}] : (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \psi_{\sigma-1}^{(n-1)} \\ \quad + (-1)^n \frac{2}{x^{n-1}} \binom{n}{1} \frac{(n-2)!}{x} \psi_{\sigma-1}' + \dots + \frac{n}{x} \psi_{\sigma-1}^{(n-1)}. \end{array} \right.$$

Hieraus findet man die entsprechende Tabelle für

$$\psi_{\sigma-2} \log^2 x,$$

indem man allenthalben $\psi_{\sigma-1}$ durch $\psi_{\sigma-2} \log x$ ersetzt und dann wieder alle logarithmenbehafteten Glieder fortlässt, also gerade so, wie man von der Tabelle (9) für ψ_σ zu der Tabelle (10) für $\psi_{\sigma-1} \log x$ überging. U. s. w.

$[P(x, \psi_{\sigma-1} \log x)]$ ist also ein nach (10) leicht zu bildender linearer homogener Differentialausdruck $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen der unabhängigen Variablen x und der abhängigen $\psi_{\sigma-1}$, $[P(x, \psi_{\sigma-2} \log^2 x)]$ ein ebensolcher $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen x und $\psi_{\sigma-2}$, u. s. w. Bezeichnen wir diese Differentialausdrücke bezw. durch

$$P_1(x, \psi_{\sigma-1}), P_2(x, \psi_{\sigma-2}), \dots, P_\sigma(x, \psi_\sigma),$$

so ist also nach (8) die Reihe ψ_σ derart zu bestimmen, dass für jeden Wert von x

$$(11) \quad P(x, \psi_\sigma) + \binom{\sigma}{1} P_1(x, \psi_{\sigma-1}) + \cdots + P_\sigma(x, \psi_0) \equiv 0$$

wird. Gleichung (11) können wir aber als eine lineare nicht homogene Differentialgleichung für die zu berechnende Reihe ψ_σ ansehen und daher als Resultat dieses Artikels aussprechen:

Die Reihe ψ_σ in dem Integrale (2) der Differentialgleichung (1) genügt der nicht homogenen linearen Gleichung

$$(12) \quad P(x, v) + \binom{\sigma}{1} P_1(x, \psi_{\sigma-1}) + \cdots + P_\sigma(x, \psi_0) = 0^1),$$

wo $P_1, P_2, \dots, P_\sigma$ mit Hilfe der Tabellen (10) u. s. w. zu bildende Ausdrücke sind, in denen nur gegebene Grössen und die als bekannt vorausgesetzten Reihen $\psi_0 \dots \psi_{\sigma-1}$ nebst ihren Ableitungen auftreten.

58. Convergenz der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen. Von dem vorangehenden Resultat machen wir sogleich Gebrauch, um die Convergenz der Reihe ψ_σ festzustellen. Dies ist in der That erforderlich, weil wir ja hier das Integral (2) ganz unabhängig von den im vorigen Kapitel definierten Integralen aufstellen.

Bei diesem Convergenzbeweis setzen wir die Convergenz der Reihen $\psi_{\sigma-1}, \psi_{\sigma-2}, \dots, \psi_0$ in der ganzen Umgebung U des Punktes $x = 0$ als bereits feststehend voraus. Und das ist wieder deshalb berechtigt, weil ja (nach Artikel 56) ψ_0 ein Integral erster Stufe ist, dessen Convergenz innerhalb U im Kapitel III in der That bewiesen wurde.

Da (12) eine nicht homogene Differentialgleichung für ψ_σ ist, übersehen wir schon jetzt, — und wir werden es später ausführlich feststellen, — dass die Recursionsformel für die Coefficienten der Reihe ψ_σ *nicht homogene* lineare Gleichungen liefern muss, während wir bei den Integralen erster Stufe in Kap. I, II, III *homogene* Gleichungen hatten. Infolgedessen kann jetzt der Fall eintreten, — der damals aus dem gedachten Grunde ausgeschlossen war, — dass diese Gleichungen unendlich grosse Werte für die Coefficienten der Reihe ψ_σ liefern, wenn nicht gewisse Bedingungen erfüllt sind. Diese Bedingungen sind natürlich einer eingehenden Untersuchung zu unterwerfen und werden sich dabei als die schon im Artikel 57 erwähnten Beschränkungen der willkürlichen Constanten in den Reihen $\psi_0 \psi_1 \dots \psi_{\sigma-1}$

1) Vgl. Fabry, Sur les intégrales des équations différentielles etc., Thèse, Paris, 1886. S. 47.

des allgemeinsten Integrals σ^{ter} Stufe herausstellen. Nehmen wir jetzt an, dass sie erfüllt seien, dass wir also bei Berechnung der Coefficienten von ψ_σ gemäss (11) endliche Werte erhalten, so lässt sich auch die Convergenz von ψ_σ folgendermassen darthun.

Setzen wir den ganzen Ausdruck

$$(13) \quad \binom{\sigma}{1} P_1(x, \psi_{\sigma-1}) + \binom{\sigma}{2} P_2(x, \psi_{\sigma-2}) + \cdots + P_\sigma(x, \psi_0) = p(x),$$

sodass (12) die Form

$$(12^a) \quad P(x, v) + p(x) = 0$$

annimmt, so wissen wir aus Artikel 31, dass eine Function v , welche der Gleichung (12^a) genügt, auch der homogenen Gleichung

$$(14) \quad \frac{dP}{dx} p - P \frac{dp}{dx} = 0$$

genügen muss. Die letztere lautet aber ausführlich geschrieben

$$(14^a) \quad \begin{aligned} v^{(n+1)} p p_0 + v^{(n)} (p p_0' + p p_1 - p_0 p') \\ + v^{(n-1)} (p p_1' + p p_2 - p_1 p') \\ + \dots \\ + v (p p_n' - p_n p') = 0. \end{aligned}$$

Dividirt man die ganze Gleichung durch p , so kommt diese Function p nur noch in dem Quotienten $\frac{p'}{p}$ vor, der eine innerhalb U convergente, zu einem Exponenten > -1 gehörige Reihe ist. Mit Hülfe dieser Bemerkung erkennt man dann ohne Weiteres, dass die homogene Differentialgleichung (14) oder (14^a) bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat, sodass jede ihr formal genügende Reihe in der Umgebung U von $x = 0$ auch convergiert. Eine solche Reihe ist aber ψ_σ ; denn wenn die Coefficienten von ψ_σ so beschaffen sind, dass

$$P(x, \psi_\sigma) + p(x) = 0,$$

so ist ja auch

$$\frac{dP(x, \psi_\sigma)}{dx} p - P(x, \psi_\sigma) \frac{dp}{dx} = 0.$$

Damit ist gezeigt:

Ergibt die Berechnung der Reihe ψ_σ gemäss der Identität (11) endliche Werte der Coefficienten, so convergiert die Reihe in der ganzen Umgebung U des Punktes $x = 0$.

Es mag noch bemerkt werden, dass nur für diesen Convergenzbeweis die Beschränkung auf eine Stelle der Bestimmtheit erforderlich war. Im Übrigen kann die gegenwärtige Untersuchung, gerade wie die von Kap. I und II, für jede nicht wesentlich singuläre Stelle $x = 0$ angestellt werden.

59. Recursionsformeln der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen. Zur wirklichen Berechnung der Reihe ψ_σ , d. h. ihrer Coefficienten, setzen wir in (11) für die ψ die schon in Artikel 55 angegebenen expliciten Ausdrücke ein

$$\psi_0 \equiv \sum_{(s)} c_s x^s, \quad \psi_1 \equiv \sum_{(s)} c'_s x^s, \dots, \psi_\sigma \equiv \sum_{(s)} c_s^{(\sigma)} x^s,$$

wo der Summationsbuchstabe s , mit einem noch zu bestimmenden Wert α anfangend, die Werte

$$s = \alpha, \quad \alpha + 1, \quad \alpha + 2, \dots$$

durchläuft und dabei mindestens einer der Coefficienten

$$c_\alpha, \quad c'_\alpha, \dots, c_\alpha^{(\sigma)}$$

von Null verschieden sein soll, sodass das Integral (2) thatsächlich zu dem an irgend einer Stelle stehenden Exponenten α gehört. In dem Resultat dieser Substitution müssen wir dann den Coefficienten einer unbestimmten Potenz von x gleich Null setzen, um die Recursionsformel zu finden.

Wir wählen hierfür wie im Artikel 6 die Potenz

$$x^k,$$

wo k um eine unbestimmte ganze Zahl grösser als α ist. Infolgedessen wird der aus

$$* \quad P(x, \psi_\sigma)$$

herrührende Teil dieses Coefficienten identisch mit $I'_{k\alpha}$ im Artikel 6, wenn man nur die c durch die $c^{(\sigma)}$ ersetzt, also mit

$$a_{k\alpha} c_\alpha^{(\sigma)} + a_{k, \alpha+1} c_{\alpha+1}^{(\sigma)} + \dots + a_{kk} c_k^{(\sigma)},$$

wofür wir zur Abkürzung gelegentlich schreiben

$$I_{k\alpha}^{0\sigma}.$$

(Für $\sigma = 0$ ist $I_{k\alpha}^{0\sigma} \equiv I'_{k\alpha}$ zu verstehen.)

Bei der Ermittlung des aus $I_1(x, \psi_{\sigma-1})$ herrührenden Teils des Coefficienten von x^k in (11) bemerken wir durch Vergleichen der Tabellen (9) und (10), dass dieser aus $P(x, y)$ gerade so gefunden wird, wie der von $P(x, \psi_\sigma)$ herrührende Teil, wenn man nur

$$\text{für } y \text{ statt } \psi_\sigma \quad : 0$$

$$\text{d. h. „} \quad \sum c_s^{(\sigma)} x^s \quad : 0,$$

$$\text{für } y' \text{ statt } \psi'_\sigma \quad : \psi_{\sigma-1}$$

$$\text{d. h. „} \quad \sum s c_s^{(\sigma)} x^{s-1} : \sum c_s^{(\sigma-1)} x^{s-1},$$

$$\text{für } y'' \text{ statt } \psi''_{\sigma} : - \frac{\psi_{\sigma-1}}{x^2} + \frac{2}{x} \psi'_{\sigma-1}$$

$$\text{d. h. } \sum s(s-1) c_s^{(\sigma)} x^{s-2} : \sum (2s-1) c_s^{(\sigma-1)} x^{s-2}$$

$$\text{für } y''' \text{ statt } \psi'''_{\sigma} : \frac{2}{x^3} \psi_{\sigma-1} - \frac{3}{x^2} \psi'_{\sigma-1} + \frac{3}{x} \psi''_{\sigma-1}$$

$$\text{d. h. } \sum s(s-1)(s-2) c_s^{(\sigma)} x^{s-3} : \sum (3s^2 - 6s + 2) c_s^{(\sigma-1)} x^{s-3}$$

u. s. w.

einsetzt, allgemein

für $y^{(\lambda)}$ statt $\psi^{(\lambda)}_{\sigma}$:

$$(-1)^{\lambda-1} \frac{(\lambda-1)!}{x^{\lambda}} \psi_{\sigma-1} + (-1)^{\lambda-2} \binom{\lambda}{1} \frac{(\lambda-2)!}{x^{\lambda-1}} \psi'_{\sigma-1} + \dots + \binom{\lambda}{1} \frac{\psi^{(\lambda-1)}_{\sigma-1}}{x},$$

$$\text{d. h. statt } \sum s(s-1) \dots (s-\lambda+1) c_s^{(\sigma)} x^{s-\lambda} :$$

$$\begin{aligned} & \sum c_s^{(\sigma-1)} x^{s-\lambda} \left\{ \lambda s(s-1) \dots (s-\lambda+2) \right. \\ & \quad - \binom{\lambda}{2} 1! s(s-1) \dots (s-\lambda+3) \\ & \quad + \binom{\lambda}{3} 2! s(s-1) \dots (s-\lambda+4) \\ & \quad - \dots \\ & \quad + (-1)^{\lambda-2} \binom{\lambda}{1} (\lambda-2)! s^{\lambda} \\ & \quad \left. + (-1)^{\lambda-1} (\lambda-1)! \right\}. \end{aligned}$$

Nun sieht man aus dieser Zusammenstellung, dass unter dem Summenzeichen die gleiche Potenz von x rechts immer mit einem c mit demselben unteren Index wie links, bei dem nur der obere Index (σ) durch $(\sigma-1)$ ersetzt wird, multipliciert ist und ausserdem mit einer ganzen Function von s , welche die erste Ableitung derjenigen ist, die links mit dem entsprechenden c multipliciert ist. Dies ist in den vier ersten Zeilen der obigen Zusammenstellung evident, und man verificiert leicht, dass auch

$$\begin{aligned} & \lambda s(s-1) \dots (s-\lambda+2) - \dots + (-1)^{\lambda-1} (\lambda-1)! \\ & \quad = \frac{d}{ds} s(s-1) \dots (s-\lambda+1) \end{aligned}$$

ist.

Hieraus folgt aber, dass der aus $P_1(x, \psi_{\sigma-1})$ herrührende Teil der gesuchten Recursionsformel aus dem von $P(x, \psi_{\sigma})$ herrührenden Teil entsteht, indem man einfach die $c^{(\sigma)}$ durch die mit gleichem

was den Vorteil bietet, dass alle $a_{ks}^{(\lambda)}$ ($s = \alpha, \alpha + 1, \dots$) nunmehr als Ableitungen nach ein und derselben Grösse erscheinen. Fasst man dann symbolisch auch $c_s^{(\lambda)}$ als λ^{te} Ableitung von c_s nach α auf, so erscheint der ganze Ausdruck $F_{k\alpha}^{(\alpha)}$ symbolisch als der σ^{te} Differentialquotient von $F_{k\alpha}$ nach α .

Da nun nach Art. 56 aus dem Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe y Integrale $\sigma^{\text{ter}}, (\sigma - 1)^{\text{ter}}, \dots, 2^{\text{ter}}, 1^{\text{ter}}$ Stufe hervorgehen, in denen bezw. $\psi_{\sigma-1}, \psi_{\sigma-2}, \dots, \psi_1, \psi_0$ den logarithmenfreien Teil bilden, so besitzen wir mit (15) gleichzeitig die Recursionsformeln der vorher als schon bekannt vorausgesetzten übrigen Reihen in dem Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe und können daher das Resultat aussprechen:

Die Reihen ψ_λ ($\lambda = 0, 1, \dots, \sigma$) eines zu α gehörigen Integrals $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe

$$\begin{aligned} y &\equiv \psi_\sigma + \binom{\sigma}{1} \psi_{\sigma-1} \log x + \dots + \psi_0 \log^\sigma x \\ &\equiv \sum c_s^{(\sigma)} x^s + \binom{\sigma}{1} \log x \sum c_s^{(\sigma-1)} x^s + \dots + \log^\sigma x \sum c_s x^s \end{aligned}$$

folgen bezw. den Recursionsformeln

$$F_{k\alpha}^{(\lambda)} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, \dots, \sigma),$$

wo

$$F_{k\alpha}^{(\sigma)} \equiv F_{k\alpha} \equiv a_{k\alpha} c_\alpha + a_{k, \alpha+1} c_{\alpha+1} + \dots + a_{k\lambda} c_\lambda$$

der in Artikel 6 gebildete Ausdruck ist und

$$F_{k\alpha}^{(\lambda)}$$

aus $F_{k\alpha}$ durch eine, in Bezug auf die c nur symbolische, durch Accente ungedeutete λ -fache Differentiation nach α hervorgeht.

60. Zugehörigkeit logarithmenbehafteter Integrale zu den Wurzeln der determinierenden Gleichung. Bildet man die Recursionsformel (15) für $k = \alpha$, so reducirt sich dieselbe auf

$$(16) \quad a_{\alpha\alpha} c_\alpha^{(\sigma)} + \binom{\sigma}{1} a'_{\alpha\alpha} c_\alpha^{(\sigma-1)} + \dots + a_{\alpha\alpha}^{(\sigma)} c_\alpha = 0,$$

wo $a_{\alpha\alpha}$ die zu $x = 0$ gehörige determinierende Function, $a'_{\alpha\alpha}, a''_{\alpha\alpha}, \dots$ deren successive Ableitungen nach α sind. Das Integral (2) sollte nun zu dem an irgend einer Stelle stehenden Exponenten α wirklich gehören. Steht dieser an erster Stelle, so sind also

$$c_\alpha^{(\sigma)} \neq 0, \quad c_\alpha^{(\sigma-1)} = c_\alpha^{(\sigma-2)} = \dots = c_\alpha = 0;$$

folglich muss dann nach (16) $a_{\alpha\alpha} \equiv 0$ sein, d. h. der Exponent α muss eine Wurzel der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung sein.

Gehört das Integral (2) dagegen zu dem an γ^{ter} Stelle stehenden Exponenten α , so ist

$$(17) \quad c_{\alpha}^{(\sigma-\gamma+1)} \neq 0, \quad c_{\alpha}^{(\sigma-\gamma)} = c_{\alpha}^{(\sigma-\gamma-1)} = \dots = c_{\alpha} = 0.$$

Bildet man also in diesem Fall das durch $(\gamma-1)$ -fache Differentiation nach $u \equiv \log x$ aus y hervorgehende Integral

$$\frac{1}{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\gamma+2)} \frac{\partial^{\gamma-1} y}{\partial u^{\gamma-1}} \\ = \psi_{\sigma-\gamma+1} + \binom{\sigma-\gamma+1}{1} \psi_{\sigma-\gamma} \log x + \dots + \psi_0 \log^{\sigma-\gamma+1} x,$$

so gehört dies wieder zu dem an erster Stelle stehenden Exponenten α . Die der Gleichung (16) entsprechende Gleichung lautet

$$(16^a) \quad a_{\alpha\alpha} c_{\alpha}^{(\sigma-\gamma+1)} + \binom{\sigma-\gamma+1}{1} a'_{\alpha\alpha} c_{\alpha}^{(\sigma-\gamma)} + \dots + a_{\alpha\alpha}^{(\sigma-\gamma+1)} c_{\alpha} = 0$$

und erfordert in Rücksicht auf (17) abermals das Verschwinden von $a_{\alpha\alpha}$. Bildet man alsdann das durch $(\gamma-2)$ -fache Differentiation aus y entstehende Integral, so lautet für dieses die den Gleichungen (16) und (16^a) entsprechende Gleichung

$$(16^b) \quad a_{\alpha\alpha} c_{\alpha}^{(\sigma-\gamma)} + \binom{\sigma-\gamma}{1} a'_{\alpha\alpha} c_{\alpha}^{(\sigma-\gamma-1)} + \dots + a_{\alpha\alpha}^{(\sigma-\gamma)} c_{\alpha} = 0,$$

welche in Rücksicht auf (17) und das aus (16^a) gezogene Resultat das Verschwinden von $a'_{\alpha\alpha}$ erfordert. So weiterschliessend erkennt man, dass, wenn y zu dem an γ^{ter} Stelle stehenden Exponenten α gehört, die Gleichungen

$$a_{\alpha\alpha} = 0, \quad a'_{\alpha\alpha} = 0, \dots, \quad a_{\alpha\alpha}^{(\gamma-1)} = 0$$

erfüllt sein müssen, d. h. dass dann α mindestens γ -fache Wurzel der zu $x=0$ gehörigen determinierenden Gleichung sein muss.

Wir haben also das Resultat:

Wenn das Integral

$$y = \psi_{\sigma} + \binom{\sigma}{1} \psi_{\sigma-1} \log x + \dots + \psi_0 \log^{\sigma} x$$

zu dem an γ^{ter} Stelle stehenden Exponenten α gehört, ist α mindestens γ -fache Wurzel der zu $x=0$ gehörigen determinierenden Gleichung.

Dass umgekehrt bei einer Stelle der Bestimmtheit $x=0$ zu einer γ -fachen Wurzel der determinierenden Gleichung γ linear unabhängige Integrale gehören, bei denen dieser Exponent bezw. an der 1^{ten}, 2^{ten}, ..., γ^{ten} Stelle steht, wissen wir bereits aus dem vorigen Kapitel (Art. 49).

und unterscheidet sich also von dem System S oder S_{α} , im Artikel 12 nur dadurch, dass an Stelle der c die $c^{(\sigma)}$ und an Stelle der Nullen links die h getreten sind. Wie wir aber dort nach den Bedingungen fragten, unter denen nicht alle c , insbesondere c_{α} , Null sind, fragen wir jetzt, unter welchen Bedingungen die $c^{(\sigma)}$, und zwar zunächst $c_{\alpha}^{(\sigma)}$, nicht unendlich grosse Werte erhalten.

Die Determinante des Systems Σ oder Σ_{α} ist dieselbe wie die von S oder S_{α} , nämlich

$$D_{\alpha\gamma} \equiv D_{\alpha\beta} \cdot D_{\beta\gamma} \dots D_{\mu\gamma}$$

und daher $\neq 0$, wenn alle Determinanten $D_{\alpha\beta}$, $D_{\beta\gamma}$, \dots , $D_{\mu\gamma} \neq 0$ sind. In diesem Fall liefert also Σ nur endliche Werte der sämtlichen Unbekannten, und wir sind schon am Ziel. Im entgegengesetzten Fall, der also insbesondere dann eintritt, wenn zu einer der Wurzeln $\alpha, \beta, \dots, \mu$ ein Integral erster Stufe gehört, müssen wir noch genauer auf das System eingehen.

Die Coefficienten $c_{\alpha+1}^{(\sigma)}$, $c_{\alpha+2}^{(\sigma)}$, \dots , $c_{\beta-1}^{(\sigma)}$, $c_{\beta+1}^{(\sigma)}$, \dots , $c_{\nu-1}^{(\sigma)}$ können nur dann unendlich werden, wenn einer oder mehrere der Coefficienten

$$c_{\alpha}^{(\sigma)}, c_{\beta}^{(\sigma)}, \dots, c_{\mu}^{(\sigma)}$$

unendlich werden; denn jene sind lineare Functionen von diesen und den endlichen Grössen h mit endlichen Coefficienten. Es kommt deshalb für unsere Frage nur auf die Werte dieser letzteren $c^{(\sigma)}$ an. Zu ihrer Berechnung können wir das System Σ wieder durch ein anderes ersetzen, welches nur noch die Unbekannten $c_{\alpha}^{(\sigma)}$, $c_{\beta}^{(\sigma)}$, \dots , $c_{\mu}^{(\sigma)}$ enthält und für ihre Werte dem System Σ äquivalent ist.

Zu dem Ende verfahren wir genau wie im Artikel 13. Für das Teilsystem $\Sigma_{\alpha\beta}$ oder

$$h_{\alpha+1} = I_{\alpha+1, \alpha}^{0\sigma}, \quad h_{\alpha+2} = I_{\alpha+2, \alpha}^{0\sigma}, \dots, h_{\beta} = I_{\beta, \alpha}^{0\sigma}$$

besteht die Identität

$$(18) \quad d_{\alpha+1, \beta} I_{\alpha+1, \alpha}^{0\sigma} + d_{\alpha+2, \beta} I_{\alpha+2, \alpha}^{0\sigma} + \dots + d_{\beta, \beta} I_{\beta, \alpha}^{0\sigma} \equiv c_{\alpha}^{(\sigma)} D_{\alpha\beta},$$

sodass, wenn man noch zur Abkürzung

$$d_{\alpha+1, \beta} h_{\alpha+1} + d_{\alpha+2, \beta} h_{\alpha+2} + \dots + d_{\beta, \beta} h_{\beta} = H_{\alpha\beta}$$

setzt, aus $\Sigma_{\alpha\beta}$ durch Composition der einzelnen Gleichungen mit $d_{\alpha+1, \beta}$, $d_{\alpha+2, \beta}$, \dots , $d_{\beta, \beta}$ folgt

$$(19) \quad H_{\alpha\beta} = c_{\alpha}^{(\sigma)} D_{\alpha\beta}.$$

Da aber $d_{\beta\beta} \neq 0$, folgt auch umgekehrt aus

w. ganz analog wie in Art. 14. So erhalten wir schliesslich das *hangssystem*

$$\begin{cases} H_{\alpha\beta} = c_{\alpha}^{(\sigma)} D_{\alpha\beta} \\ H' = c_{\alpha}^{(\sigma)} D' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ H^{(m)} = c_{\alpha}^{(\sigma)} D^{(m)}, \end{cases}$$

es nur noch $c_{\alpha}^{(\sigma)}$ enthält, aber für dessen Wert dem System Σ *aequi-* ist. Die Grössen D rechts sind in bekannter Weise aus den anten Grössen a_k , zusammengesetzt, die H links sind linear und en in den Coefficienten $c, c', \dots, c^{(\sigma-1)}$, welche in den Reihen llgemeinsten Integrals σ^{ter} Stufe auftreten.

Die Gleichungen (21) ergeben uns nun unmittelbar die notwen- und hinreichenden Bedingungen dafür, dass $c_{\alpha}^{(\sigma)}$ nicht unendlich . Sobald nämlich in einer dieser Gleichungen der Coefficient $c_{\alpha}^{(\sigma)}$ rechts Null ist, tritt als Bedingung das Verschwinden der der linken Seite stehenden Grösse H auf. Die gesuchten Be- ungsgleichungen, die wir kurz mit B_{σ} bezeichnen wollen, ergeben daher als lineare homogene Relationen zwischen den Coefficienten Reihen in dem allgemeinsten Integral σ^{ter} Stufe; es sind also hungen, denen die in dem allgemeinsten Integral σ^{ter} Stufe ent- nen willkürlichen Constanten genügen müssen.

Die eventuell übrig bleibenden der Gleichungen (21), in denen Coefficient von $c_{\alpha}^{(\sigma)}$ *nicht* Null ist, zeigen dann gleichzeitig, ob otwendig den Wert Null erhält, oder eine bestimmte lineare ogene Function der Coefficienten $c, c', \dots, c^{(\sigma-1)}$ wird, die nicht edes Wertsystem der unter diesen willkürlich bleibenden Null — Sind in allen Gleichungen (21) die D rechts Null und die us entspringenden Bedingungsgleichungen B_{σ} sämtlich erfüllbar, ird also durch das ganze System (21) und folglich Σ gar nichts $c_{\alpha}^{(\sigma)}$ ausgesagt, und $c_{\alpha}^{(\sigma)}$ bleibt somit willkürlich. Das Verschwin- dieser sämtlichen D in den Gleichungen (21) stellt aber nach el 14 (12) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dass zu $\alpha (\equiv r_{\lambda})$ ein Integral erster Stufe gehört. Nur in diesem also kann $c_{\alpha}^{(\sigma)}$ auch dann noch willkürlich bleiben, wenn schon alle willkürlichen Constanten in $\psi_0 \psi_1 \dots \psi_{\sigma-1}$ verfügt ist.

Bei dem Übergang von dem ursprünglich vorliegenden System Σ en Gleichungen (21) sind allmählich sämtliche $c_{\alpha+1}^{(\sigma)}, c_{\alpha+2}^{(\sigma)}, \dots, c_{\alpha-1}^{(\sigma)}$ efallen, aber auf zweierlei sehr verschiedene Art. Die einen, weil ich zufolge dem System Σ oder einem der später auftretenden me nur durch die vorangehenden $c^{(\sigma)}$ und die h , bzw. H aus-

drückten, sodass sie nur unendlich werden können, wenn eines dieser vorangehenden $c^{(\sigma)}$ unendlich würde. Die andern, — wie $c_r^{(\sigma)}$ in dem ursprünglichen System, — indem sie in einem der an Stelle von Σ tretenden Systeme erst in der letzten Gleichung auftreten könnten, durch Verschwinden ihres Coefficienten thatsächlich aber von selbst aus dem ganzen System ausfallen. *Diese letzteren $c^{(\sigma)}$ bleiben daher völlig willkürlich.* (Dies ist übrigens auch von anderer Seite her einleuchtend: diese $c^{(\sigma)}$ sind ja nach Artikel 15 gerade mit demselben Index behaftet wie diejenigen c dort, welche auch bei den Integralen erster Stufe willkürlich bleiben, also auch als Anfangscoefficienten von reihenförmigen Integralen auftreten. Addiert man aber zu einem beliebigen Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe

$$y \equiv \psi_\sigma + \binom{\sigma}{1} \psi_{\sigma-1} \log x + \dots$$

Integrale erster Stufe, die mit willkürlichen Coefficienten anfangen, so hat man immer noch ein Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe, in welchem bei ψ_σ eben jene nämlichen Coefficienten willkürlich sind.) Wir sehen also aus dieser Überlegung, dass von den Coefficienten $c_{\alpha+1}^{(\sigma)}, \dots, c_{r-1}^{(\sigma)}$ einige willkürlich bleiben können, alle übrigen sich linear und homogen durch $c_\alpha^{(\sigma)}$, durch jene willkürlichen und durch die h bzw. H ausdrücken, sodass, wenn $c_\alpha^{(\sigma)}$ nicht unendlich wird, auch kein anderes dieser $c^{(\sigma)}$ unendlich wird. Die Bedingungen B_σ sind demnach schon die für unsere ganze Frage notwendigen und hinreichenden. Sind dieselben nicht erfüllbar, so giebt es also kein Integral der $(\sigma + 1)^{\text{ten}}$ Stufe in der betrachteten Gruppe.

Die Ergebnisse dieses Artikels fassen wir folgendermassen zusammen.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen B_σ dafür, dass die Recursionsformel (15) für die Coefficienten der Reihe ψ_σ endliche Werte liefert, ergeben sich aus den Gleichungen (21) und sind Gleichungen, denen die willkürlichen Constanten des allgemeinsten Integrals σ^{ter} Stufe unterworfen werden müssen. Dann und nur dann, wenn dieselben erfüllbar sind, existiert ein Integral $(\sigma + 1)^{\text{ter}}$ Stufe. Die auch nach Verfügung über alle willkürlichen Constanten in $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{\sigma-1}$ noch willkürlich bleibenden Coefficienten von ψ_σ sind mit denselben Potenzen von x multipliciert wie die willkürlichen Coefficienten eines logarithmenfreien Integrals. Alle anderen Coefficienten von ψ_σ sind linear und homogen durch diese willkürlichen und durch die Coefficienten der Reihen $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{\sigma-1}$ ausgedrückt. Die so bestimmte Reihe ψ_σ ist in der ganzen Umgebung U des Punktes $x = 0$ convergent.

52. Das allgemeinste Integral einer Gruppe. Nunmehr sind wir im Besitz aller Mittel, um die allgemeinsten Integrale der einzelnen Gruppen, endlich das allgemeinste Integral der ganzen Gruppe wirklich aufzustellen.

Es sei jetzt

$$y_0 = \psi_{00} = \sum_{(k)} c_k x^k$$

das allgemeinste in die Gruppe Γ gehörige Integral erster Stufe, welches man nach Kap. I, II, III ermittelt hat. Die Coefficienten c_k sind linear und homogen von etwa ν_0 derselben abhängig, die willkürlich bleiben (s. Art. 15), und die wir durch die Zeichen

$$C_{01}, C_{02}, \dots, C_{0\nu_0}$$

hervorheben wollen. Infolgedessen giebt es genau ν_0 linear unabhängige Integrale erster Stufe und nicht mehr. Giebt man nämlich den ν_0 willkürlichen Constanten der Reihe nach die Wertsysteme

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1, \end{array}$$

erhält man ν_0 linear unabhängige Reihen, weil sie alle mit verschiedenen Exponenten beginnen. Mehr als ν_0 können aber nicht sein, weil sonst eine lineare homogene Verbindung derselben mit willkürlichen Coefficienten mehr willkürliche Constanten enthielte als das allgemeinste Integral erster Stufe.

Ist also $\nu_0 = \lambda$, so besitzen wir in (22) bereits das allgemeinste Integral der Gruppe Γ , weil diese λ linear unabhängige Integrale be- (s. Art. 48). Ist dagegen $\nu_0 < \lambda$, so muss es noch Integrale erster Stufe geben:

$$y_1 = \psi_{11} + \psi_{10} \log x = \sum_{(k)} c'_k x^k + \log x \sum_{(k)} c_k x^k.$$

Diese zu berechnen, setzen wir in

$$\begin{aligned} R'_{k\alpha} &= a_{k\alpha} c'_\alpha + \dots + a_{kk} c'_k \\ &+ a'_{k\alpha} c_\alpha + \dots + a'_{kk} c_k = 0 \end{aligned}$$

die c die Coefficienten von ψ_{00} aus (22) ein, erhalten dann die Abhängungsgleichungen B_1 dafür, dass sich für die c' endliche Werte finden und beschränken diesen Gleichungen gemäss die willkürlichen Constanten $C_{01}, \dots, C_{0\nu_0}$ von ψ_{00} — was sicher möglich ist, ohne dass

alle $C_0 = 0$ gesetzt werden, da es Integrale 2^{ter} Stufe giebt. Es mögen darnach von jenen ν_0 willkürlichen Constanten in ψ_{00} noch ν_1 ($0 < \nu_1 \leq \nu_0$) willkürlich bleiben, die wir mit

$$C_{11} \ C_{12} \dots C_{1\nu_1}$$

bezeichnen. So entsteht aus ψ_{00} die in (23) schon mit ψ_{10} bezeichnete Reihe, in welcher sämtliche Coefficienten c_k linear und homogen von den ν_1 willkürlichen Coefficienten $C_{11} \dots C_{1\nu_1}$ abhängen. In der Reihe ψ_{11} aber bleiben nach dem vorigen Artikel die und nur die Coefficienten willkürlich, welche zugleich als Anfangscoefficienten in Integralen erster Stufe dienen können, und die wir deshalb wieder mit denselben Zeichen $C_{01} \dots C_{0\nu_0}$ belegen. Die Coefficienten von ψ_{11} im allgemeinsten Integral zweiter Stufe sind also linear und homogen von den $\nu_0 + \nu_1$ willkürlichen Constanten

$$C_{01}, C_{02}, \dots, C_{0\nu_0}; \quad C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1\nu_1}$$

abhängig.

Geben wir allen Constanten der ersteren Reihe $C_{01} \dots C_{0\nu_0}$ den Wert Null und den $C_{11} \dots C_{1\nu_1}$ ν_1 verschiedene Wertsysteme, deren Determinante $\neq 0$ ist, z. B. die Wertsysteme

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1, \end{array}$$

so sind die Coefficienten von $\log x$ in den ν_1 Integralen und damit die ν_1 Integrale selbst linear unabhängig. Wir erhalten also dadurch ν_1 linear unabhängige Integrale zweiter Stufe, durch welche sich unter Hinzufügung von Integralen erster Stufe jedes Integral zweiter Stufe ausdrücken lässt. Da auch die ν_0 Integrale erster Stufe und diese ν_1 Integrale zweiter Stufe zusammen linear unabhängig sind, weil eben eine lineare Relation zwischen Integralen verschiedener Stufen in Relationen zwischen den Integralen der einzelnen Stufen zerfallen muss¹⁾ und solche ausgeschlossen sind, so besitzen wir jetzt im Ganzen $\nu_0 + \nu_1$ linear unabhängige Integrale.

Ist $\nu_0 + \nu_1 = \lambda$, so erschöpfen wir mit den Integralen erster und zweiter Stufe bereits die ganze Gruppe I'; andernfalls muss es noch Integrale dritter Stufe geben

$$\begin{aligned} (24) \quad y_2 &= \psi_{22} + 2\psi_{21} \log x + \psi_{20} \log^2 x \\ &\equiv \sum_{(k)} c_k'' x^k + 2 \log x \sum_{(k)} c_k' x^k + \log^2 x \sum_{(k)} c_k x^k. \end{aligned}$$

1) S. Anhang, Zu Kap. IV. Satz 5.

rer Berechnung haben wir wieder für ψ_{21} und ψ_{20} zunächst die n ψ_{11} und ψ_{10} einzusetzen und die Recursionsformel

$$F''_{k\alpha} = 0$$

Bestimmung der Coefficienten c''_k von ψ_{22} zu benutzen. Damit Coefficienten endliche Werte erhalten, müssen die Bedingungen-
ungen B_2 erfüllt werden, welche linear und homogen in den
irlichen Constanten von ψ_{11} und ψ_{10} , d. h. in

$$C_{01} \dots C_{0r_0}; \quad C_{11} \dots C_{1r_1}$$

Um das Letztere hervorzuheben, schreiben wir für den Augen-
die symbolische Bezeichnung für dieses Gleichungssystem aus-
cher in der Form

$$B_2(C_0, C_1).$$

ist

$$B_2(0, C_1) + B_2(C_0, 0) = B_2(C_0, C_1),$$

die linken Seiten der Gleichungen B_2 lassen sich als Summen
wei Gliedern darstellen, in deren einem die sämtlichen $C_{01} \dots C_{0r_0}$,
ren anderem die sämtlichen $C_{11} \dots C_{1r_1}$ gleich Null gesetzt sind.
man aber in ψ_{10} sämtliche $C_{11} \dots C_{1r_1}$ gleich Null setzt, so ist
se Reihe identisch Null, und die für y_2 angesetzte Form reducirt
auf die eines Integrals zweiter Stufe. Folglich müssen die Glei-
gen $B_2(C_0, 0)$ mit den Bedingungen B_1 identisch sein und *für sich*
werden. Damit dann aber die Bedingungen $B_2(C_0, C_1)$ erfüllt
müssen die $C_{11} \dots C_{1r_1}$ also den Bedingungsgleichungen $B_2(0, C_1)$
gen, *in denen sie allein auftreten*.

Dass die Gleichungen $B_2(C_0, 0) = B_1$ von den Constanten $C_{01} \dots C_{0r_0}$
ie mit $C_{11} \dots C_{1r_1}$ bezeichneten willkürlich lassen, wissen wir ja
s aus der vorangehenden Betrachtung. Dass diese C gerade in
n allgemeinsten Integral dritter Stufe willkürlich bleiben müssen
nur diese, erkennt man aber auch in anderer Weise. Die
. C_{1r_1} sind ja die willkürlichen Coefficienten in der mit $\log x$
multiplierten Reihe des allgemeinsten Integrals zweiter Stufe, welches
zu dem allgemeinsten Integral dritter Stufe hinzufügen kann,
dieses zu ändern. Es können aber ausser $C_{11} \dots C_{1r_1}$ keine
en Coefficienten in ψ_{21} willkürlich bleiben; denn macht man in
allgemeinsten Integral dritter Stufe ψ_{20} durch Nullsetzen seiner
irlichen Coefficienten zu Null, so bleibt ja ein Integral zweiter
y, bei dem die mit $\log x$ multiplizierte Reihe nicht mehr will-
che Coefficienten enthalten kann als beim allgemeinsten Integral
er Stufe.

in dem allgemeinsten Integral $(l+1)^{\text{ter}}$ Stufe zugleich das all-
 einste Integral der ganzen Gruppe Γ . Wir erhalten daraus die
 einsten Integrale der niedrigeren Stufen, wenn wir sämtliche
 bzw. auch noch sämtliche C_{l-1} u. s. w. gleich Null setzen.

Wir können daher das Ergebnis dieses Artikels dahin zusammen-
 fassen:

In dem allgemeinsten Integral der Gruppe Γ

$$y_l = \psi_u + \binom{l}{1} \psi_{l,l-1} \log x + \dots + \psi_{l0} \log^l x$$

die Coefficienten jeder Reihe ψ lineare homogene Functionen der in
 und in den folgenden Reihen willkürlich bleibenden Coefficienten. In
 reihen willkürlich die v_0 Coefficienten $C_{01} \dots C_{0v_0}$ derjenigen Potenzen
 x , die Anfangspotenzen von Integralen erster Stufe sein können, —
 $l-1$ die v_1 Coefficienten $C_{11} \dots C_{1v_1}$ derjenigen Potenzen von x , die
 ngspotenzen der mit $\log x$ multiplicierten Reihe in Integralen zweiter
 sein können, u. s. w. Für die Zahlen v_0, v_1, \dots, v_l besteht die
 Bedingung

$$v_0 > v_1 > v_2 > \dots > v_l > 0$$

die Gleichung

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_l = \lambda.$$

§3. Folgerung aus der Recursionsformel. Aus der Gestalt der
 recursionsformel (15) können wir nunmehr noch eine interessante
 Bemerkung ziehen, die von erheblichem Vorteil für die praktische Be-
 rechnung der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen ist.

In dem allgemeinsten Integral der Gruppe Γ

$$y_l = \psi_u + \binom{l}{1} \psi_{l,l-1} \log x + \dots + \psi_{l0} \log^l x,$$

$$\psi_{lq} = \sum_{(k)} c_k^{(q)} x^k \quad (k = r_k, r_k + 1, \dots),$$

$$(q = 0, 1, \dots, l)$$

in die Coefficienten

$$\begin{array}{c} c_{r_2}, c_{r_2+1}, \dots, c_{r_1} \\ c'_{r_2}, c'_{r_2+1}, \dots, c'_{r_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{r_2}^{(l)}, c_{r_2+1}^{(l)}, \dots, c_{r_1}^{(l)} \end{array}$$

berechnet sein. Dies ist in den beiden vorangehenden Artikeln
 ausführlich entwickelt worden und erfordert nur die Auflösung einer

setzen kann, wo die Exponenten von x in der Summe jetzt von α unabhängig sind, so folgt

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\psi(x, \alpha)]_{\alpha=r_\lambda} = \psi_{l0} \\ \left[\frac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=r_\lambda} = \psi_{l1} + \psi_{l0} \log x \\ \left[\frac{\partial^2 \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha^2} \right]_{\alpha=r_\lambda} = \psi_{l2} + 2\psi_{l1} \log x + \psi_{l0} \log^2 x \\ \dots \dots \dots \\ \left[\frac{\partial^l \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha^l} \right]_{\alpha=r_\lambda} = \psi_{ll} + \binom{l}{1} \psi_{l, l-1} \log x + \dots + \psi_{l0} \log^l x. \end{array} \right.$$

Wir erhalten demnach durch l -fache Differentiation der Reihe $\psi(x, \alpha)$ nach α und durch die Substitution $\alpha = r_\lambda$ das allgemeinste Integral y_l der Gruppe Γ .

Dass wir über die Convergenz der von x und α abhängigen Reihe $\psi(x, \alpha)$ nichts wissen, ist dabei ganz gleichgültig, da wir die gliedweise Differentiation, d. h. die Differentiation der einzelnen $C_k(\alpha)$ jedenfalls ausführen, dann aber eben aus der besonderen Gestalt der Recursionsformeln (15) erschliessen können, dass die so formal erzeugten Reihen für $\alpha = r_\lambda$ in die convergenten Reihen des allgemeinsten Integrals der Gruppe übergehen. Wir haben also das Resultat:

Nach Auflösung einer endlichen Anzahl von endlichen linearen Gleichungssystemen bilden wir lediglich mit Hilfe der einen Recursionsformel $F_{k\alpha} = 0$ nach (27) die Reihe

$$\psi(x, \alpha),$$

welche l -mal nach α differenziert für $\alpha = r_\lambda$ das allgemeinste Integral der Gruppe Γ

$$\left[\frac{\partial^l \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha^l} \right]_{\alpha=r_\lambda} = y_l = \psi_{ll} + \binom{l}{1} \psi_{l, l-1} \log x + \dots + \psi_{l0} \log^l x$$

liefert¹⁾.

Mit dem allgemeinsten Integral der ganzen Gruppe Γ umfassen wir nun sämtliche Integrale derselben, insbesondere also auch sämtliche Integrale, die zu den einzelnen Wurzeln $r_1 r_2 \dots r_\lambda$ der determinierenden Gleichung gehören. Hätten wir nur ein Integral aufsuchen wollen, das sämtliche Integrale umfasst, die etwa zu $r_1 r_2 \dots r_\alpha$ ($\alpha < \lambda$) gehören, so hätten wir genau wie im Vorstehenden verfahren können, nur an Stelle von r_λ , der kleinsten Wurzel der ganzen Gruppe, die kleinste der zu berücksichtigenden Wurzeln, r_α , einsetzen müssen.

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 76. (1873) p. 214 ff., insbesondere S. 222. — Tannery, Annales de l'école normale, 2^{me} série, t. 4. (1875). S. 143, 144.

64. Beispiel. Um die in diesem Kapitel entwickelte Berechnung der logarithmenbehafteten Integrale an einem möglichst einfachen Beispiel¹⁾ zu veranschaulichen, wählen wir die Gauss'sche Differentialgleichung mit der speziellen Bestimmung, dass beide Wurzeln der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung den Wert Null haben. Dies tritt nach Artikel 10 ein, wenn $\gamma = 1$. Wir betrachten also die Differentialgleichung

$$(34) \quad x(x-1)y'' - [1 - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0$$

mit der zu $x = 0$ gehörigen Recursionsformel

$$(35) \quad (k + \alpha - 1)(k + \beta - 1)c_{k-1} - k^2 c_k = 0.$$

Da $k = 0$ eine Doppelwurzel der determinierenden Gleichung ist, ist das allgemeinste Integral der entsprechenden Gruppe Γ , welches sich hier mit dem allgemeinen Integral der Differentialgleichung deckt, in der Form

$$y_1 = \psi_{11} + \psi_{10} \log x = \sum_{(k)} c'_k x^k + \log x \sum_{(k)} c_k x^k$$

anzusetzen. Die Reihe ψ_{10} ist nach der Formel (35) zu berechnen, welche nur c_0 willkürlich lässt und ergibt (s. Art. 23)

$$\psi_{10} = c_0 F(\alpha, \beta, 1; x).$$

Zur Berechnung von ψ_{11} müssen wir Formel (35) nach der in der allgemeinen Entwicklung immer mit α bezeichneten Grösse — in Bezug auf die c nur symbolisch — differenzieren. Diese Grösse wollen wir hier, weil der Buchstabe α in der Gauss'schen Differentialgleichung noch anderweitig vorkommt, mit a , die linke Seite von (35) demnach mit F'_{ka} bezeichnen. Da nun k um eine ganze Zahl grösser als α ist und die Recursionsformel (35) nur eine stets endlich bleibende Zahl von Gliedern (zwei) enthält, können wir in diesem Specialfall einfach nach k differenzieren und erhalten so zur Bestimmung der Coefficienten c' von ψ_{11} die Formel

$$(36) \quad F'_{ka} = (2k + \alpha + \beta - 2)c_{k-1} - 2kc_k \\ + (k + \alpha - 1)(k + \beta - 1)c'_{k-1} - k^2 c'_k = 0,$$

welche nur c'_0 willkürlich lässt und alle andern c' als lineare homogene Functionen von c_0 und c'_0 ausdrückt, wie es mit der allgemeinen Theorie übereinstimmt.

Um jedoch für die Berechnung des allgemeinen Integrals y_1

1) Vergl. dazu Lohnstein, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Jahrg. 38. (1893). S. 27 ff. — Vergl. auch Artikel 113.

die Methode des vorigen Artikels anzuwenden, haben wir zunächst nach (26)

$$C_a(a) = c_0 + c'_0 a$$

zu setzen. Die folgenden Coefficienten $C'_{a+1}(a)$, $C'_{a+2}(a)$, ... der jetzt zu bildenden Reihe $\psi(x, a)$ werden aus der Recursionsformel (35) berechnet, wenn man darin $k = a + 1$, $a + 2$, ... und $C'_k(a)$ statt c_k setzt.

Also ergibt sich

$$\psi(x, a)$$

$$(c_0 + c'_0 a) x^a \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha + a) \dots (\alpha + a + k - 1) (\beta + a) \dots (\beta + a + k - 1)}{(a + 1)^2 \dots (a + k)^2} x^k \right].$$

Differenziert man einmal — weil ja das gesuchte Integral nur zweiter Stufe ist — nach a , so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, a)}{\partial a} &= c'_0 x^a \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha + a) \dots (\beta + a + k - 1)}{(a + 1)^2 \dots (a + k)^2} x^k \right] \\ &+ (c_0 + c'_0 a) x^a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{(\alpha + a) \dots (\beta + a + k - 1)}{(a + 1)^2 \dots (a + k)^2} \right) x^k \\ &+ \log x (c_0 + c'_0 a) x^a \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha + a) \dots (\beta + a + k - 1)}{(a + 1)^2 \dots (a + k)^2} x^k \right]. \end{aligned}$$

Setzen wir $a = 0$ und bezeichnen die aus der Summe in der zweiten Zeile dieser Formel entstehende Reihe kurz mit

$$P'_1(\alpha, \beta, 1; x),$$

so ergibt sich das allgemeine Integral von (34) bei $x = 0$ in der Gestalt

$$(37) \quad y_1 = c'_0 P(\alpha, \beta, 1; x) + c_0 P'_1(\alpha, \beta, 1; x) + c_0 P(\alpha, \beta, 1; x) \log x.$$

Nach der allgemeinen Theorie (s. z. B. Artikel 62 Schluss) wäre hier c_0 mit C_{11} , c'_0 mit C'_{01} identisch. Setzt man $c_0 = 0$, so bleibt in (37) in der That das allgemeinste Integral erster Stufe übrig; setzt man $c'_0 = 0$, so bleibt ein Integral zweiter Stufe, durch welches mit Hinzunahme des allgemeinsten Integrals erster Stufe jedes der zweiten ausdrückbar ist. Die Coefficienten von ψ_{10} sind linear und homogen in $c_0 = C_{11}$, die von ψ_{11} in $c_0 = C_{11}$ und $c'_0 = C'_{01}$.

Kapitel IX.

Zerlegung der Integralgruppen in Untergruppen.

65. Fundamentalsystem von lauter einfachsten Integralen. Wir im Artikel 55 die Aufstellung eines Fundamentalsystems von Integralen für die Umgebung der Stelle der Bestimmtheit $x = 0$ geteilt, dessen Elemente eine möglichst einfache Gestalt haben, d. h. von welchem der Logarithmus in jedem Element nur bis zu einer möglichst niedrigen Potenz aufsteigt.

Diese Aufgabe ist durch die Entwicklungen des vorigen Kapitels gänzlich bereits gelöst. Nach denselben sind wir ja im Stande, jede der den einzelnen Wurzelgruppen g, g_1, g_2, \dots der determinierenden Gleichung entsprechenden Integralgruppen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ das allgemeinste Integral aufzustellen. Dies lautet für die Gruppe Γ

$$y_i \equiv \psi_{ii} + \binom{l}{1} \psi_{i,i-1} \log x + \dots + \psi_{i0} \log^l x$$

enthält linear und homogen die $v_0 + v_1 + \dots + v_l \equiv \lambda$ willkürlichen Constanten

$$C_{01} \dots C_{0v_0}, \quad C_{11} \dots C_{1v_1}, \dots, C_{l1} \dots C_{lv_l},$$

aus $l + 1$ verschiedenen Serien bestehen. Giebt man diesen Constanten die λ Wertsysteme

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1, \end{array}$$

erhält man bezw. die λ Integrale der Gruppe Γ

$$y_{01} y_{02} \dots y_{0v_0}, y_{11} \dots y_{1v_1}, \dots, y_{l1} \dots y_{lv_l},$$

also das Integral $y_{\alpha v_\beta}$ aus y_i entsteht, indem $C_{\alpha v_\beta} = 1$, alle andern Constanten aber $= 0$ gesetzt werden. Diese λ Integrale sind linear unabhängig, da die Coefficienten der höchsten Potenz von $\log x$ in Integralen gleicher Stufe immer linear unabhängig sind. Da sich weiter durch $y_{01} \dots y_{0v_0}$ jedes Integral erster Stufe ausdrücken

liess, giebt es kein von diesen linear unabhängiges Integral der ersten Stufe. Da sich jedes Integral zweiter Stufe durch $y_{11} \dots y_{1r_1}$ und Integrale erster Stufe ausdrücken liess, giebt es also kein anderes von jenen und den Integralen erster Stufe linear unabhängiges Integral zweiter Stufe. U. s. w. Die Integrale (2) setzen sich also aus möglichst vielen linear unabhängigen Integralen erster, dann aus möglichst vielen linear unabhängigen Integralen zweiter Stufe u. s. w. zusammen; d. h. *wenn die Integrale einer jeden Gruppe in derselben Weise bestimmt werden wie die Integrale (2) bei Γ , so erhalten wir ein aus lauter einfachsten Integralen zusammengesetztes Fundamentalsystem.*

66. Integraluntergruppen. Untergruppen höchster Stufe¹⁾. Die zweite Forderung, die im Artikel 55 ausgesprochen wurde, war die nach einem Fundamentalsystem, bei welchem die Umlaufsrelationen sich möglichst einfach und übersichtlich gestalten. Auch hierzu gelangen wir von dem im vorigen Kapitel aufgestellten allgemeinsten Integral der Gruppe aus, indem wir daraus λ linear unabhängige, derart in *Untergruppen* zusammengefasste Integrale herleiten, dass in die Umlaufsrelation jedes Integrals immer nur die Integrale seiner Untergruppe eintreten.

Wir stellen zunächst diejenigen Untergruppen auf, deren Integrale bis zur höchsten, der $(l+1)^{\text{ten}}$ Stufe aufsteigen, oder — wie wir kurz sagen wollen — *die Untergruppen höchster Stufe*. Zu dem Ende gehen wir von den ν_l linear unabhängigen Integralen $(l+1)^{\text{ter}}$ Stufe

$$y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1r_l}$$

aus, die wir aber jetzt mit

$$\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{1r_l}$$

bezeichnen wollen. Sie gehen aus dem allgemeinsten Integral der Gruppe Γ hervor, indem jedes Mal eine andere der Constanten $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1r_l} = 1$, alle andern willkürlichen Constanten aber $= 0$ gesetzt werden. Die dadurch aus $\psi_{11}, \psi_{1, l-1}, \dots, \psi_{10}$ entstehenden Reihen wollen wir bezw. durch

$$\varphi_{11}^{(a)}, \varphi_{1, l-1}^{(a)}, \dots, \varphi_{10}^{(a)}$$

bezeichnen, wo a bei den Integralen $\eta_{11}, \eta_{12} \dots \eta_{1r_l}$ bezw. den Wert 1, 2, \dots, ν_l hat. Es ist also

$$(3) \quad \eta_{1a} \equiv \varphi_{11}^{(a)} + \binom{l}{1} \varphi_{1, l-1}^{(a)} \log x + \dots + \varphi_{10}^{(a)} \log^l x$$

$$(a = 1, 2, \dots, \nu_l).$$

1) Die Aufstellung der Untergruppen erfolgt hier im Wesentlichen nach Jürgens, Crelles Journ. Bd. 80. (1876). S. 153 ff.

Die Umlaufsrelationen führen jedes Integral nur in eine lineare homogene Verbindung mit explicite angebbaren Coefficienten von sich selbst und den in der Untergruppe folgenden Integralen über. Die Gesamtzahl der Untergruppen, $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_i \equiv \nu_0$, stimmt mit der Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Stufe überein.

Die Zahlen $\mu_0 \mu_1 \dots \mu_i$ werden später von anderer Seite her noch eine besondere Bedeutung gewinnen.

68. Modificierte Aufstellung der Untergruppen. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass in der Literatur über diesen Gegenstand die Untergruppen vielfach in einer von der bisher gegebenen etwas verschiedenen Gestalt auftreten, wollen wir zeigen, wie die letztere aus der unsrigen herzuleiten ist.

Wir behalten von jeder Untergruppe Γ_{aa} das Integral höchster Stufe

$$\eta_{aa} = \varphi_{aa}^{(a)} + \binom{a}{1} \varphi_{a, a-1}^{(a)} \log x + \dots + \varphi_{a0}^{(a)} \log^a x$$

unverändert bei und bezeichnen dies jetzt durch

$$(9) \quad \xi_{aa} = \eta_{aa}.$$

Als zweites Integral nehmen wir aber

$$(9') \quad \xi'_{aa} = \eta_{aa} - \omega_1 \eta_{aa} = \xi_{aa} - \omega_1 \xi_{aa},$$

wo die überstrichenen Functionen wieder die durch einen Umlauf um $x = 0$ aus den nicht überstrichenen erzeugten bedeuten, als drittes

$$(9'') \quad \xi''_{aa} = \eta_{aa} - \omega_1 \eta_{aa} - \omega_1 (\eta_{aa} - \omega_1 \eta_{aa}) \\ \xi'_{aa} - \omega_1 \xi'_{aa}$$

u. s. w. Da die Stufe dieser Integrale in (9), (9'), (9'') u. s. w. sich jedesmal um die Einheit verringert, wie aus den Umlaufsrelationen, die die Form der Gleichungen (6) haben, folgt, so erhalten wir schliesslich in

$$(9^{(a)}) \quad \xi_{aa}^{(a)}$$

ein Integral erster Stufe, das sich von

$$\frac{1}{a!} \frac{\partial^a \eta_{aa}}{(\partial \log x)^a} = \varphi_{a0}^{(a)}$$

nur durch einen constanten Faktor unterscheidet. Für dieses letzte Integral ist daher

$$(10) \quad \xi_{aa}^{(a)} = \omega_1 \xi_{aa}^{(a)}.$$

Wir haben also jetzt die Untergruppe $\Gamma_{\alpha\alpha}$ zusammengesetzt aus den Integralen

$$(11) \quad \xi_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}, \xi_{\alpha\alpha}^{(\alpha-1)}, \dots, \xi'_{\alpha\alpha}, \xi_{\alpha\alpha}.$$

Nach (9'), (9'') u. s. w. (10) lauten aber die Umlaufsrelationen dieser modifizierten Untergruppe $\Gamma_{\alpha\alpha}$

$$(12) \quad \begin{cases} \overline{\xi_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}} & \equiv \omega_1 \xi_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} \\ \overline{\xi_{\alpha\alpha}^{(\alpha-1)}} & \equiv \omega_1 \xi_{\alpha\alpha}^{(\alpha-1)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \overline{\xi'_{\alpha\alpha}} & \equiv \omega_1 \xi'_{\alpha\alpha} + \xi''_{\alpha\alpha} \\ \overline{\xi_{\alpha\alpha}} & \equiv \omega_1 \xi_{\alpha\alpha} + \xi'_{\alpha\alpha} \end{cases}$$

d. h. bei der modifizierten Gestalt (11) der Untergruppe $\Gamma_{\alpha\alpha}$ multipliziert sich jedes Integral mit ω_1 und vermehrt sich um das vorhergehende Integral.

69. Specialfälle und Beispiele. Im Artikel 53 haben wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zusammengestellt, dass die ganze Integralgruppe Γ logarithmenfrei ist. Ist dies aber der Fall, so giebt es λ linear unabhängige Integrale erster Stufe in der Gruppe Γ oder die Gruppe Γ zerfällt in λ Untergruppen erster Stufe.

Bei einer regulären Stelle gehören sämtliche Wurzeln der determinierenden Gleichung $0, 1, \dots, n-1$ in eine einzige Gruppe g . Zu jeder derselben gehört ein Integral erster Stufe. Mithin können wir sagen: Bei einer regulären Stelle sondern sich die n Elemente eines Fundamentalsystems, die sämtlich zu derselben Gruppe Γ gehören, in n Untergruppen erster Stufe.

Als weiteres Beispiel benutzen wir die in Artikel 54 behandelte Differentialgleichung

$$(13) \quad x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

wo $a_1 a_2 \dots a_n$ Constanten sind. Sind $r_1 r_2 \dots r_\lambda$ die Wurzeln einer Gruppe g der zu $x=0$ gehörigen determinierenden Gleichung, so entspricht jeder einfachen Wurzel r_i ein Integral x^{r_i} , jeder γ -fachen Wurzel r_k entsprechen die γ Integrale

$$x^{r_k}, x^{r_k} \log x, \dots, x^{r_k} \log^{\gamma-1} x.$$

Jedes der ersteren bildet für sich eine Untergruppe erster Stufe, die letzteren bilden zusammen eine solche γ^{ter} Stufe; denn aus dem letzten jener γ Integrale leitet man durch partielle Differentiation nach $\log x$ die vorhergehenden ab. Wir haben daher das Ergebnis:

Die λ Integrale einer Gruppe Γ der Differentialgleichung (13), welche die Wurzelgruppe g der determinierenden Gleichung gehören, teilen sich in Untergruppen, dass jeder γ -fachen Wurzel ($\gamma = 1, 2, \dots$) Untergruppe γ^{ter} Stufe entspricht.

Endlich betrachten wir den dem zuerst erwähnten diametral gegenstehenden Specialfall, dass nämlich die sämtlichen λ Integrale einer Gruppe Γ eine einzige Untergruppe bilden, die mithin, da alle Integrale einer Untergruppe verschiedener Stufe sind, λ^{ter} Stufe ist. Zu $r_1 (\equiv \nu)$ gehörige Integral ist folglich in diesem Fall das erste von der ersten Stufe. Nach einem Satz des Artikel 16 sind aber die Determinanten (wenn $\alpha \equiv r_\lambda$)

$$D_{\alpha\beta}, D_{\beta\gamma}, \dots, D_{\mu\nu}$$

nicht $\neq 0$, und umgekehrt, wenn diese Determinanten von Null verschieden sind, gehört zu keiner andern Wurzel als $r_1 \equiv \nu$ ein Integral erster Stufe und bilden daher die sämtlichen λ Integrale von Γ eine einzige Untergruppe.

Wir haben daher das Resultat:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass sämtliche Integrale einer Gruppe Γ eine einzige Untergruppe bilden, bestehen darin, dass keine der Determinanten

$$D_{\alpha\beta}, D_{\beta\gamma}, \dots, D_{\mu\nu},$$

verschwindet, wenn $\alpha \equiv r_\lambda$, $\nu \equiv r_1$ und $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \nu$ die sämtlichen von einander verschiedenen Wurzeln der Gruppe g sind, verschwindet.

Hiermit haben wir zugleich — wie in Artikel 53 angekündigt — die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Integrale (8) oder (8^a) Kap. VII der Logarithmus thatsächlich bis zur höchstmöglichen Potenz, nämlich in y_α ($\alpha = 1, 2, \dots, \lambda$) bis $(\alpha - 1)^{\text{ten}}$ Potenz aufsteigt. Denn wenn das Letztere der Fall ist, sind ja die sämtlichen Integrale (8) Kap. VII eine einzige Untergruppe und umgekehrt.

Dieser zuletzt erwähnte Specialfall, dass die ganze Gruppe Γ aus einer einzigen Untergruppe besteht, tritt insbesondere dann ein, wenn $r_1 = r_2 = \dots = r_\lambda$, d. h. wenn die ganze Wurzelgruppe g aus einer einzigen λ -fachen Wurzel besteht.

Kapitel X.

Notwendigkeit der Bestimmtheitsgestalt der Differentialgleichung bei einer Stelle für bestimmtes Verhalten sämtlicher Integrale daselbst.

70. Aufgabe und Gang der Lösung. Die drei letzten Kapitel waren der Untersuchung der Integrale in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit $x=0$ gewidmet und führten zu dem Ergebnis, dass bei einer solchen stets ein Fundamentalsystem von sich bestimmt verhaltenden Integralen existiert. Wir können also — in etwas erweitertem Sinne des Wortes — sagen: *bei einer Stelle der Bestimmtheit verhalten sich sämtliche Integrale bestimmt*, was so zu verstehen ist, dass ein aus Integralen verschiedener Gruppen zusammengesetztes Integral sich linear und homogen durch mehrere Integrale ausdrücken lässt, deren jedes sich bei der betreffenden Stelle bestimmt verhält.

Erklärt sich jetzt nachträglich durch diese Erkenntnis schon die Bezeichnung eines Wertes von x , dessen zugehörige determinierende Gleichung den Grad n hat, als *Stelle der Bestimmtheit*, so wird die Berechtigung dieses Namens völlig erwiesen sein, wenn wir nunmehr noch zeigen, dass die Bestimmtheitsgestalt der Differentialgleichung bei einer Stelle $x=0$ für das bestimmte Verhalten sämtlicher Integrale daselbst auch notwendig ist. Wir setzen also voraus, die Differentialgleichung

$$(1) \quad P(x, y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

besitze n linear unabhängige Integrale

$$(2) \quad u_1 u_2 \dots u_n$$

in der Gestalt ganzer Functionen von $\log x$, deren Coefficienten nach Potenzen von x fortschreitende Reihen sind. Von den Reihen eines und desselben Integrals u können wir annehmen, dass sie nur solche Potenzen von x enthalten, die sich um ganze Zahlen oder Null von einander unterscheiden. Dies lässt sich ähnlich wie eine entsprechende Annahme in Artikel 5 und mit Hülfe der Sätze des Anhangs, Zu Kap. IV, insbesondere Satz 6, leicht begründen. Ferner setzen wir voraus, dass die sämtlichen Integrale u sich bei $x=0$ bestimmt verhalten, d. h. dass alle in ihnen auftretenden Reihen einen

Anfangsexponent mit endlichem absoluten Betrag haben. Aus diesen Voraussetzungen allein wird sich folgern lassen, dass $x = 0$ Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung (1) ist.

Zu dem Ende leiten wir aus dem gegebenen Fundamentalsystem (2) zunächst ein anderes ab, welches dadurch charakterisiert ist, dass nicht zwei Elemente zu demselben an gleicher Stelle stehenden Exponenten gehören. Sodann zeigen wir der Reihe nach, dass die Coefficienten von (1) bei $x = 0$ eindeutig sein müssen, dass $x = 0$ nicht wesentlich singulär sein kann, und endlich, dass $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit sein muss.

71. Umwandlung des vorgelegten Fundamentalsystems. In dem Fundamentalsystem $u_1 u_2 \dots u_n$ stellen wir zunächst alle diejenigen Integrale zusammen, deren Reihen nur Potenzen von x mit untereinander höchstens um ganze Zahlen verschiedenen Exponenten enthalten, also — um die frühere Bezeichnung wieder aufzunehmen — alle Integrale, die in dieselbe Gruppe gehören. Seien etwa

$$u_1 u_2 \dots u_\lambda$$

sämtliche Integrale einer Gruppe aus $u_1 u_2 \dots u_n$, sodass also die Exponenten aller Potenzen von x , die in diesen λ Integralen auftreten, untereinander nur um ganze Zahlen oder Null verschieden sind, dagegen keines der $n - \lambda$ übrigen Integrale diese Eigenschaft teilt.

Jedes der Integrale $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ gehört nun zu einem bestimmten, an bestimmter Stelle stehenden Exponenten, den wir bezw. mit $s_1 s_2 \dots s_\lambda$ bezeichnen wollen. Dabei kann man die Integrale $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ in dieser Folge bereits so geordnet denken, dass jedes Integral zu einem Exponenten gehört, dessen reeller Teil nicht grösser als beim vorhergehenden ist, und, wenn zwei aufeinanderfolgende Integrale zu demselben Exponenten gehören, dieser Exponent bei dem zweiten an mindestens ebenso hoher Stelle steht, wie bei dem ersten.

Sollten nun etwa $u_\lambda u_{\lambda-1} \dots u_{\lambda-\alpha}$ zu demselben an gleicher Stelle stehenden Exponenten $s_\lambda \equiv s_{\lambda-1} \equiv \dots \equiv s_{\lambda-\alpha}$ gehören, so kann man offenbar α Constanten

$$a_{\lambda-1} a_{\lambda-2} \dots a_{\lambda-\alpha}$$

so wählen, dass die Integrale

$$u_{\lambda-1} + a_{\lambda-1} u_\lambda, u_{\lambda-2} + a_{\lambda-2} u_\lambda, \dots, u_{\lambda-\alpha} + a_{\lambda-\alpha} u_\lambda$$

entweder überhaupt nicht mehr zu dem Exponenten s_λ oder doch zu diesem an niedrigerer Stelle stehenden Exponenten gehören. Die λ Integrale

$$(3) \quad u_1 u_2 \dots u_{\lambda-\alpha-1}, u_{\lambda-\alpha} + a_{\lambda-\alpha} u_\lambda, \dots, u_{\lambda-1} + a_{\lambda-1} u_\lambda, u_\lambda,$$

welche wir nun zunächst an Stelle der Integrale $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ setzen, sind aber wieder linear unabhängig. Denn die Determinante dieser λ Functionen lässt sich als Produkt aus der Determinante der $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ und der Determinante der Substitutionscoefficienten darstellen, welche letztere den Wert 1 hat. Die Determinante der Functionen (3) ist daher mit der Determinante der $u_1 \dots u_\lambda$ identisch und deshalb von Null verschieden.

u_λ gehört also nun unter allen Integralen (3) zu dem Exponenten mit dem kleinsten reellen Teil, und dieser Exponent steht — falls noch andere Integrale zu demselben gehören — in u_λ an höherer Stelle als in allen andern. Mit den $\lambda - 1$ Integralen

$$u_1 u_2 \dots u_{\lambda-\alpha-1}, u_{\lambda-\alpha} + a_{\lambda-\alpha} u_\lambda, \dots, u_{\lambda-1} + a_{\lambda-1} u_\lambda$$

können wir nun aber geradeso verfahren wie vorher mit den λ Integralen $u_1 u_2 \dots u_\lambda$, u. s. w., bis wir schliesslich diese Integrale durch die λ anderen

$$(4) \quad v_1 v_2 \dots v_\lambda$$

ersetzt haben, von denen nicht zwei zu demselben an gleicher Stelle stehenden Exponenten gehören.

Die Integrale (4) sind aber ebenfalls linear unabhängig; denn ihre Determinante ist mit derjenigen der $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ identisch, weil die Gleichheit der Determinanten bei dem successiven Übergang von den u zu den v bei jedem einzelnen Schritt besteht.

Ebenso denken wir uns natürlich die andern Gruppen der u umgewandelt und können daher jetzt mit dem in Gruppen eingeteilten Fundamentalsystem

$$(5) \quad v_1 v_2 \dots v_\lambda, v_{\lambda+1} \dots v_n$$

weiter operieren, dessen Elemente bezw. zu den Exponenten $r_1 r_2 \dots r_\lambda \dots r_n$ gehören mögen, und von denen nicht zwei zu demselben an gleicher Stelle stehenden r gehören.

Da also die Integrale (5) sich in Bezug auf die Zuordnung zu den Exponenten geradeso verhalten wie die Gruppenintegrale (8), (8^a), (8^b) in Kap. VII, und da nur aus dieser Zuordnung dort die Umlaufsrelationen (12) und (13) in Artikel 51 folgten, so gilt auch von dem Fundamentalsystem (5) hier der Satz: Bei einem Umlauf um $x=0$ geht jedes Integral v_α in eine lineare homogene Function von sich selbst und den in seiner Gruppe vorangehenden Integralen über, wobei der Coefficient von v_α selbst $\neq 0$ ist und den Wert hat

$$\omega_\alpha \equiv e^{2r_\alpha \pi i}.$$

Wenn also v_α z. B. ein Element der Gruppe $v_1 v_2 \dots v_\lambda$ ist, so lautet die Umlaufsrelation

$$(6) \quad \bar{v}_\alpha \equiv \omega_{\alpha 1} v_1 + \omega_{\alpha 2} v_2 + \dots + \omega_{\alpha, \alpha-1} v_{\alpha-1} + \omega_\alpha v_\alpha,$$

wo die ω_α auch $\omega_{\alpha 1}, \omega_{\alpha 2} \dots \omega_{\alpha, \alpha-1}$ Constanten sind.

72. Beweis, dass $x = 0$ höchstens ausserwesentlich singuläre Stelle ist¹⁾. Wir beweisen jetzt, dass die Coefficienten der Differentialgleichung (1), welche bei $x = 0$ das Fundamentalsystem $v_1 v_2 \dots v_n$ besitzt, in der Umgebung dieser Stelle eindeutig sind. Gleichzeitig wird sich aus dem bestimmten Verhalten jener Integrale ergeben, dass $x = 0$ höchstens ausserwesentlich singuläre Stelle ist.

Zu dem Ende bilden wir aus den Integralen v und ihren n ersten Ableitungen

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_1' & \dots & v_1^{(n)} \\ v_2 & v_2' & \dots & v_2^{(n)} \\ & \dots & \dots & \dots \\ v_n & v_n' & \dots & v_n^{(n)} \end{array}$$

durch Streichung der ersten, zweiten, ..., $(n+1)^{\text{ten}}$ Colonne die Determinanten

$$D_n, D_{n-1}, \dots, D_1, D (\equiv D_0).$$

Dann hat man nach Art. 26 (4) für die Coefficienten p der Differentialgleichung (1) die Ausdrücke

$$(7) \quad p_v = (-1)^v \frac{D_v}{D} \quad (v=1, 2, \dots, n).$$

Da in jeder der Determinanten D_v ($v=0, 1, \dots, n$) jedes Element eine ganze Function von $\log x$ ist, deren Coefficienten nach Entfernung des Faktors x^{r_1} in der ersten, x^{r_2} in der zweiten, u. s. w., x^{r_n} in der n^{ten} Zeile eindeutig sind und negative Potenzen von x höchstens in endlicher Anzahl enthalten, so hat — nach Potenzen von $\log x$ entwickelt — jede dieser Determinanten die Form

$$(8) \quad D_v \equiv x^{r_1+r_2+\dots+r_n} [\chi_{v0} + \chi_{v1} \log x + \dots + \chi_{v\sigma} \log^\sigma x],$$

wo $\chi_{v0} \chi_{v1} \dots \chi_{v\sigma}$ wieder eindeutige Functionen von x sind und höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten.

Es müssen aber in (8) die Functionen $\chi_{v1} \dots \chi_{v\sigma}$ identisch Null sein, was sich folgendermassen erschliessen lässt. Beim Umlauf von x um $x = 0$ ändert sich v_α gemäss der Relation (6). Für alle Ableitungen von v_α gilt aber die Identität

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. (1866) 4. S. 139 ff.
Heffter, Differentialgleichungen.

$$(9) \quad \overline{\frac{d^q v_\alpha}{dx^q}} \equiv \frac{d^q \bar{v}_\alpha}{dx^q};$$

denn nach Art. 56 (6) kann man die Umlaufsrelation für v_α aufschreiben

$$\frac{1}{\omega_\alpha} \bar{v}_\alpha \equiv v_\alpha + \frac{2\pi i}{1} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \log x} + \dots + \frac{(2\pi i)^\sigma}{\sigma!} \frac{\partial^\sigma v_\alpha}{(\partial \log x)^\sigma},$$

wenn σ der Grad von v_α in $\log x$ ist. Hiernach ist

$$(10) \quad \frac{d^q}{dx^q} \left(\frac{1}{\omega_\alpha} \bar{v}_\alpha \right) \equiv \frac{d^q v_\alpha}{dx^q} + \frac{2\pi i}{1} \frac{d^q}{dx^q} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \log x} \right) + \dots + \frac{(2\pi i)^\sigma}{\sigma!} \frac{d^q}{dx^q} \left(\frac{\partial^\sigma v_\alpha}{(\partial \log x)^\sigma} \right)$$

Andererseits ist $\frac{d^q v_\alpha}{dx^q}$ wieder eine ganze Function von $\log x$, Grad $\leq \sigma$, und besitzt daher die Umlaufsrelation

$$(11) \quad \frac{1}{\omega_\alpha} \frac{d^q v_\alpha}{dx^q} \equiv \frac{d^q v_\alpha}{dx^q} + \frac{2\pi i}{1} \frac{\partial}{\partial \log x} \left(\frac{d^q v_\alpha}{dx^q} \right) + \dots + \frac{(2\pi i)^\sigma}{\sigma!} \frac{\partial^\sigma}{(\partial \log x)^\sigma} \left(\frac{d^q v_\alpha}{dx^q} \right)$$

Da aber¹⁾

$$\frac{\partial^\tau}{(\partial \log x)^\tau} \left(\frac{d^q v_\alpha}{dx^q} \right) \equiv \frac{d^q}{dx^q} \left(\frac{\partial^\tau v_\alpha}{(\partial \log x)^\tau} \right),$$

so sind die rechten Seiten von (10) und (11) einander gleich, somit ist (9) erwiesen. — Wenn also x den Umlauf beschreibt, tritt in D_ν an Stelle jedes Elementes eine lineare homogene Verbindung der Elemente seiner Colonne, und die Coefficienten derselben sind nach (9) bei allen Elementen einer Zeile immer ein und dasselbe. Es multipliciert sich daher D_ν bei dem Umlauf einfach mit der Determinante der Coefficienten der Umlaufsrelationen der Integrale $v_1 v_2 \dots v_n$. Diese hat aber nach (6) den Wert

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \dots \omega_n \equiv e^{2\pi i(r_1 + r_2 + \dots + r_n)},$$

Folglich ist

$$(12) \quad \bar{D}_\nu \equiv D_\nu e^{2\pi i(r_1 + \dots + r_n)} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n).$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (8), so ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung, dass in (8)

$$\chi_{\nu 1} \equiv \chi_{\nu 2} \equiv \dots \equiv \chi_{\nu \sigma} \equiv 0$$

sein muss. Denn da beim Umlauf von x um $x = 0$ sich $x^{r_1 + \dots + r_n}$ mit dem Faktor $e^{2\pi i(r_1 + \dots + r_n)}$ multipliciert, muss nach (12)

1) S. Anhang.

$$\frac{D_v}{x^{r_1+r_2+\dots+r_n}}$$

in der Umgebung von $x = 0$ *eindeutig* sein. Hieraus folgt aber die *Eindeutigkeit* der Quotienten zweier D_v , d. h. der Coefficienten p in (1).

Es wurde nun bei dieser Ableitung lediglich davon Gebrauch gemacht, dass

$$v_1 v_2 \dots v_n$$

ein Fundamentalsystem bilden, von dem jedes Element v_α bei dem Umlauf sich mit einer von Null verschiedenen Constanten ω_α multipliciert und um eine lineare homogene Function der ihm *vorangehenden* Integrale nur vermehrt. Demnach können wir das bis jetzt gefundene Resultat gleich allgemeiner dahin aussprechen:

Sind $v_1 v_2 \dots v_n$ n linear unabhängige Functionen von x , deren jede, v_α , bei einem Umlauf um $x = 0$ sich mit einer von Null verschiedenen Constanten multipliciert und ausserdem höchstens um eine lineare homogene Function der ihr vorangehenden Functionen $v_1 v_2 \dots v_{\alpha-1}$ vermehrt, so bilden dieselben ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, die bei $x = 0$ eindeutige Coefficienten hat¹⁾.

Da nun in unserem speziell vorliegenden Fall in den Quotienten (7) Zähler und Nenner höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten, kann man immer eine solche Potenz von x herausnehmen, dass Zähler und Nenner für $x = 0$ einen von Null verschiedenen endlichen Wert annehmen und demgemäss dieser übrig bleibende Bruch wieder in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelbar ist. Multipliciert man also die ganze Gleichung noch mit einer geeigneten Potenz von x , so kann man alle negativen Potenzen von x in den Coefficienten zum Wegfall bringen und die Gleichung in die Normalform bei $x = 0$ setzen

$$(13) \quad x^n \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

wo $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von x sind, die für $x = 0$ nicht sämtlich verschwinden. Daher ist jetzt bewiesen:

Damit die sämtlichen Integrale der Differentialgleichung (1) sich bei $x = 0$ bestimmt verhalten, darf $x = 0$ höchstens ausserwesentlich singuläre Stelle sein.

73. Nachweis, dass $x = 0$ Stelle der Bestimmtheit ist. Nachdem wir im vorigen Artikel erkannt haben, dass infolge unserer Voraussetzungen über das Fundamentalsystem (2) die Differentialgleichung

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 76 (1873). S. 242.

(1) bei $x = 0$ keine wesentlich singuläre Stelle hat, befinden wir uns auf der Basis der Untersuchung von Kap. I, II, III und des daran anschliessenden Kap. VIII. Nach dem letzteren (s. Art. 60) wissen wir aber, dass, wenn ein Integral v_α zu dem an γ^{ter} Stelle stehenden Exponenten r_α gehört, r_α mindestens γ -fache Wurzel der determinierenden Gleichung sein muss. Nun ist das Fundamentalsystem $v_1 v_2 \dots v_n$ so beschaffen, dass nicht zwei seiner Elemente zu demselben an gleicher Stelle stehenden Exponenten gehören, und wenn γ Elemente zu demselben Exponenten gehören, eines von ihnen zu dem an γ^{ter} Stelle stehenden Exponenten gehört. Diese Exponenten sind bezw.

$$r_1 r_2 \dots r_n.$$

Also muss die zu $x = 0$ gehörige determinierende Function von (1) durch

$$(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

teilbar, d. h. *mindestens* und — da sie nicht höheren Grades sein kann — *genau vom n^{ten} Grade* sein.

In Gleichung (13) ist daher $\mathfrak{P}_0(0) \neq 0$, d. h. $x = 0$ ist Stelle der Bestimmtheit.

Hiermit haben wir die gewünschte Umkehrung bewiesen und den wichtigen Satz erhalten:

Das notwendige und hinreichende Kriterium dafür, dass bei einer Stelle $x = 0$ die sämtlichen Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung sich bestimmt verhalten, besteht darin, dass die zu $x = 0$ gehörige determinierende Gleichung vom n^{ten} Grad ist, oder — was dasselbe ist — dass die Differentialgleichung bei $x = 0$ in die Form

$$x^n \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{P}_n y = 0$$

gesetzt werden kann, wo $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von x sind und $\mathfrak{P}_0(0) \neq 0$ ist.

Kapitel XI.

Fundamentalgleichung.

74. Aufgabe der folgenden Untersuchung. Im Artikel 32 haben wir als Hauptaufgabe die Untersuchung der Integrale in der Umgebung der verschiedenartigen Werte von x hingestellt. Diese Aufgabe haben wir bisher für die Stellen der Bestimmtheit gelöst, indem wir zeigten, wie man für die Umgebung einer solchen ein Fundamentalsystem von Integralen aufstellen kann. Unser Ausgangspunkt für die Ermittlung desselben war dabei der (s. Art. 5), dass wir, geführt durch die Gestalt der Differentialgleichung selbst, diese durch eine sich bestimmt verhaltende Reihe zu befriedigen versuchten. Dies gelang bei Stellen der Bestimmtheit immer, und wir konnten dann mittelst der Fuchs'schen Methode (s. Art. 46, 47) ein ganzes Fundamentalsystem gewinnen.

Jener Versuch erweist sich aber bei ausserwesentlich singulären Stellen, die nicht zugleich Stellen der Bestimmtheit sind, im allgemeinen als vergeblich, weil bei einer solchen — wenn überhaupt formal die Differentialgleichung befriedigende Reihen zu bilden sind — dieselben im allgemeinen divergieren (s. Art. 19). Selbst wenn aber der Ausnahmefall eintritt, — von dem später eingehend die Rede sein wird, — dass eine solche Reihe convergiert, so können wir doch nicht n linear unabhängige, sich bei der betreffenden Stelle bestimmt verhaltende Integrale finden, da dies ja nach dem vorigen Kapitel eine Stelle der Bestimmtheit erfordert. Es muss also schon bei einer ausserwesentlich singulären Stelle der Unbestimmtheit Integrale von anderer Gestalt geben, als die ist, welche uns bisher nur begegnete.

Das Gleiche gilt von den wesentlich singulären Stellen. Hier kommt aber sogar noch hinzu, dass wir gar nicht in der Lage sind, den oben erwähnten Versuch anzustellen, weil (s. Art. 5) in diesem Falle die Methode der unbestimmten Coefficienten — wenigstens bei Beschränkung auf elementare Hilfsmittel — stets versagt.

Die vorstehenden Ueberlegungen zeigen einmal; dass wir noch gar nicht wissen, in welcher Gestalt wir die Integrale bei einer Stelle der

Unbestimmtheit im allgemeinen zu suchen haben, und ferner, dass uns die bisher benutzte Methode bei der Untersuchung dieser Frage im Stich lässt. Unsere nächste Aufgabe ist daher die, festzustellen, *welche Gestalt im allgemeinen die Elemente eines in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit gültigen Fundamentalsystems haben*. Wir gelangen aber zur Lösung dieser Aufgabe, indem wir mittelst des Kreisfortsetzungsverfahrens (s. Kap. VI) zunächst untersuchen, wie sich *irgend ein* Fundamentalsystem beim Umlauf um die betreffende singuläre Stelle verhält, und dann nach *demjenigen* Fundamentalsystem fragen, dessen Elemente sich bei demselben Umlauf möglichst einfach verhalten. Aus diesem Verhalten lässt sich endlich die analytische Gestalt eines in der Umgebung der betreffenden singulären Stelle gültigen Fundamentalsystems erschliessen.

75. Aufstellung der Fundamentalgleichung¹⁾. Es sei $x = 0$ eine Stelle der Unbestimmtheit für die Differentialgleichung

$$(1) \quad P(x, y) \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0;$$

$x = 0$ soll aber nicht zu denjenigen vom Gebiet der Differentialgleichung ausgeschlossenen Stellen gehören, die nicht einmal eine Umgebung von endlicher Ausdehnung besitzen (s. Art. 3). Die Umgebung U von $x = 0$ ist also, je nachdem diese Stelle ausserwesentlich oder wesentlich singulär, ein Kreis oder ein Kreisring mit dem Mittelpunkt $x = 0$ und von nicht unendlich kleiner Ausdehnung. Wir wollen auch in dem ersteren Falle aus später ersichtlichen Gründen den Mittelpunkt durch einen beliebig kleinen Kreis ausgeschnitten denken, sodass wir als Umgebung U einer Stelle der Unbestimmtheit $x = 0$ stets einen *Kreisring* mit dem Mittelpunkt $x = 0$ ansehen. Was wir suchen, ist also die analytische Gestalt eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (1) innerhalb des Kreisringes U .

Wir wollen aber schon hier bemerken, dass alles Folgende auch gilt, wenn wir unter $x = 0$ eine ganz beliebige Stelle, nicht notwendig eine Stelle der Unbestimmtheit, und unter U irgend einen Kreisring mit dem Mittelpunkt $x = 0$ verstehen, der keinen singulären Punkt enthält. Demnach kommt die folgende Untersuchung wesentlich darauf hinaus, dass wir nach der *analytischen Gestalt der Integrale in einem ringförmigen Gebiet* fragen. Während aber bei einer Stelle der Bestimmtheit $x = 0$, wie wir wissen, auch ein im Innern eines *Kreises* gültiges Fundamentalsystem existiert, ist es, wie wir sehen werden, für die Stellen der Unbestimmtheit charakteristisch, dass der Gültig-

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. (1866) S. 131 ff.

y für sich verschwinden, sodass wir für $c_1 c_2 \dots c_n$ die n linearen homogenen Gleichungen erhalten

$$(7) \quad \begin{cases} (\alpha_{11} - \omega) c_1 + \alpha_{21} c_2 + \dots + \alpha_{n1} c_n = 0 \\ \alpha_{12} c_1 + (\alpha_{22} - \omega) c_2 + \dots + \alpha_{n2} c_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{1n} c_1 + \alpha_{2n} c_2 + \dots + (\alpha_{nn} - \omega) c_n = 0. \end{cases}$$

Diese ergeben aber dann und nur dann für die c ein anderes Wertsystem als das triviale, bei dem alle $c = 0$ sind, wenn die Determinante des Gleichungssystems (7) verschwindet, d. h. wenn ω eine Wurzel der Gleichung

$$(8) \quad A(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \omega & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

ist. Diese Gleichung heisst *die zu dem betrachteten Umlauf gehörige Fundamentalgleichung*. Wenn der Umlauf eine Fundamentalschleife ist, können wir auch sagen: *die zu der Stelle $x = 0$ gehörige Fundamentalgleichung*.

Das Ergebnis des gegenwärtigen Artikels ist daher dieses:

Damit bei einem beliebigen Umlauf ein Integral (5) sich nur mit einer Constanten ω multipliziere, muss ω eine Wurzel der zu diesem Umlauf gehörigen Fundamentalgleichung (8) sein, worauf sich die Constanten des Integrals (5) aus dem Gleichungssystem (7) ergeben.

76. Invarianz der Linearteiler der Fundamentalgleichung¹⁾.

Bevor wir uns aber an die Verwertung der Fundamentalgleichung für denjenigen Zweck, zu dem sie aufgestellt wurde, begeben (Kap. XII), müssen wir uns mit den Eigenschaften dieser wichtigen Gleichung noch näher bekannt machen.

Wir gelangen von dem für die beliebige Stelle x_0 in U beliebig fixierten Fundamentalsystem (2) ausgehend zu der Gleichung (8). Für die spätere Nutzanwendung ist es zunächst wichtig, die *Unabhängigkeit der Fundamentalgleichung von dem zu Grund gelegten Fundamentalsystem* darzuthun, d. h. zu zeigen, dass man zu derselben Gleichung gelangt beim Ausgang von einem ganz beliebigen anderen Fundamentalsystem

$$(2^a) \quad z_1, z_2, \dots, z_n,$$

1) Vergl. zu diesem und dem folgenden Artikel Hamburger, Crelles Journ. Bd. 76. (1873), S. 115 ff.

sobald nur die beide Male von x beschriebenen Umläufe nicht wesentlich von einander verschieden sind, d. h. genau dieselben singulären Punkte einschliessen.

Ist dies nämlich der Fall, so können wir den zweiten Umlauf, ohne sein Ergebnis zu ändern (§. Kap. VI), so umgestalten, dass er sich zusammensetzt aus einem Weg von seinem Ausgangspunkt x_1 , der im Gültigkeitsbereich der Integrale $z_1 z_2 \dots z_n$ liegt, nach x_0 , aus dem Kreisumlauf von x_0 aus innerhalb U und aus demselben Weg wie vorher von x_0 nach x_1 zurück. Es sei

$$(9) \quad \begin{cases} z_1 \equiv \gamma_{11} y_1 + \dots + \gamma_{1n} y_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_n \equiv \gamma_{n1} y_1 + \dots + \gamma_{nn} y_n \end{cases}$$

der bei dem Weg von x_1 nach x_0 erzielte Ausdruck der z durch die y . Die Werte der Coefficienten γ_{ik} werden dabei geradeso bestimmt wie im Kap. VI, auch wenn $z_1 z_2 \dots z_n$ nicht ein für die Umgebung einer regulären Stelle definiertes Fundamentalsystem ist, indem man $z_1 \dots z_n$ zuerst nach Formel (10) Art. 43 durch ein in der Umgebung von x_1 gültiges reguläres Fundamentalsystem ausdrückt und dann wie dort fortführt. Da $z_1 z_2 \dots z_n$ ein Fundamentalsystem bilden, ist auch umgekehrt $y_1 \dots y_n$ durch $z_1 \dots z_n$ ausdrückbar und daher auch hier

$$|\gamma_{ik}| \equiv C \neq 0.$$

Bei dem ganzen Umlauf von x_1 aus möge nun das Fundamentalsystem (2^a) übergehen in

$$(3^a) \quad \begin{cases} z_1 \equiv \beta_{11} z_1 + \dots + \beta_{1n} z_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_n \equiv \beta_{n1} z_1 + \dots + \beta_{nn} z_n, \end{cases}$$

wo

$$|\beta_{ik}| \equiv B \neq 0,$$

sodass die aus dem Fundamentalsystem (2^a) entstehende Fundamentalgleichung die Gestalt

$$(8^a) \quad B(\omega) = \begin{vmatrix} \beta_{11} - \omega, & \beta_{12}, & \dots, & \beta_{1n} \\ \beta_{12}, & \beta_{22} - \omega, & \dots, & \beta_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots, & \cdot \\ \beta_{1n}, & \beta_{2n}, & \dots, & \beta_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

erhält.

Nach den vorangehenden Erörterungen über die beiden Umläufe von x_0 und x_1 aus besteht nun zwischen den Substitutionen

$$(\alpha_{ik}), \quad (\beta_{ik}), \quad (\gamma_{ik}),$$

wenn noch mit $(\gamma_{ik})^{-1}$ die zu (γ_{ik}) inverse Substitution bezeichnet wird, die Identität

$$(\beta_{ik}) \equiv (\gamma_{ik})(\alpha_{ik})(\gamma_{ik})^{-1}$$

oder, wenn beiderseits noch die Substitution (γ_{ik}) ausgeführt wird,

$$(10) \quad (\beta_{ik})(\gamma_{ik}) \equiv (\gamma_{ik})(\alpha_{ik}).$$

Bezeichnen wir die so entstehende Substitution mit (δ_{ik})

$$(\delta_{ik}) \equiv (\beta_{ik})(\gamma_{ik}) \equiv (\gamma_{ik})(\alpha_{ik}),$$

so ist also, da bei Composition zweier Substitutionen immer die Zeilen der ersten mit den Columnen der zweiten componiert werden,

$$(11) \quad \delta_{ik} \equiv \beta_{i1}\gamma_{1k} + \beta_{i2}\gamma_{2k} + \dots + \beta_{in}\gamma_{nk} \equiv \gamma_{i1}\alpha_{1k} + \dots + \gamma_{in}\alpha_{nk}$$

($i, k = 1, 2, \dots, n$).

Bildet man jetzt das Produkt der Determinanten C und $A(\omega)$ durch Composition der Zeilen, andererseits das Produkt von $B(\omega)$ und C durch Composition der Columnen, so erhält man zufolge (11) dasselbe Resultat, nämlich

$$(12) \quad C \cdot A(\omega) \equiv B(\omega) \cdot C \equiv D(\omega),$$

wo

$$(13) \quad D(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \delta_{11} - \gamma_{11}\omega & \dots & \delta_{1n} - \gamma_{1n}\omega \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} - \gamma_{n1}\omega & \dots & \delta_{nn} - \gamma_{nn}\omega \end{vmatrix}.$$

Demnach ist für jeden Wert von ω

$$A(\omega) = B(\omega),$$

d. h. die beiden Fundamentalgleichungen (8) und (8^a) stimmen in ihren Coefficienten und folglich in ihren Wurzeln oder Linearteilern überein.

Wir haben also zunächst das Resultat:

Die Linearteiler der zu einem bestimmten Umlauf gehörigen Fundamentalgleichung sind von der Wahl des zu ihrer Bildung benutzten Fundamentalsystems unabhängig.

77. Invarianz der Elementarteiler der Fundamentalgleichung.

Wir können aber noch eine erheblich weiter gehende Folgerung aus den Identitäten (12) ziehen.

Streicht man in einer Determinante n^{ten} Grades ν Zeilen und ν Columnen, so entsteht eine *Unterdeterminante ν^{ter} Stufe*, die $(n - \nu)^2$ Elemente enthält. Solcher Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe kann man $\binom{n}{\nu}^2 \equiv \mu^2$ bilden. Diese Unterdeterminanten wollen wir

$$\left. \begin{array}{ll} \text{bei } A(\omega) & \text{mit } a_{ik} \\ \text{,, } B(\omega) & \text{,, } b_{ik} \\ \text{,, } C & \text{,, } c_{ik} \\ \text{,, } D(\omega) & \text{,, } d_{ik} \end{array} \right\} (i, k = 1, 2, \dots, \mu)$$

bezeichnen, wo ein bestimmtes Wertepaar von i und k andeutet, dass die betreffende Unterdeterminante durch Streichung einer bestimmten Zeilencombination und einer bestimmten Columnencombination aus der zugehörigen Determinante n^{ten} Grades entsteht.

Nach einem Satz der Determinantentheorie ¹⁾ folgt dann aus (12) und aus der Art, wie die Determinantenmultiplicationen ausgeführt wurden, einerseits

$$d_{ik} = c_{i1}a_{k1} + c_{i2}a_{k2} + \dots + c_{i\mu}a_{k\mu} \\ (i, k = 1, 2, \dots, \mu)$$

andererseits

$$d_{ik} = b_{1i}c_{1k} + b_{2i}c_{2k} + \dots + b_{\mu i}c_{\mu k}, \\ (i, k = 1, 2, \dots, \mu)$$

also

$$(14) \quad c_{i1}a_{k1} + \dots + c_{i\mu}a_{k\mu} = b_{1i}c_{1k} + \dots + b_{\mu i}c_{\mu k}. \\ (i, k = 1, 2, \dots, \mu)$$

Die μ^2 Gleichungen (14) kann man nun sowohl benutzen, um die auf der linken Seite stehenden a_{ik} durch die rechts stehenden b_{ik} , als auch umgekehrt diese durch jene auszudrücken. Giebt man nämlich k irgend einen festen Wert und i die Werte $1, 2, \dots, \mu$, so hat man μ Gleichungen für die jetzt als Unbekannte zu betrachtenden Grössen

$$a_{k1} \ a_{k2} \ \dots \ a_{k\mu}$$

links, während rechts alle μ^2 b_{ik} auftreten. Die Determinante des Gleichungssystems links ist

$$|c_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, \dots, \mu),$$

d. h. die Determinante des Systems der μ^2 Unterdeterminanten v^{ter} Stufe von C . Diese Determinante hat aber den Wert²⁾

$$|c_{ik}| = C^{\binom{n-1}{v}}$$

und ist daher $\neq 0$. Da das Gleiche für jeden Wert von k gilt, so drücken jene Gleichungen in der That sämtliche μ^2 a_{ik} linear und homogen durch die b_{ik} aus. — Benutzt man die Gleichungen (14) um-

1) S. Anhang.

2) S. Baltzor, Theorie u. Anw. d. Det. 5. Aufl. § 7. 6. S. 68.

gekehrt, so erscheint rechts wieder jedesmal $|c_{ik}|$ als Determinante, und die b_{ik} werden linear und homogen durch die a_{ik} ausgedrückt.

Hieraus ziehen wir den Schluss: Wenn sämtliche Unterdeterminanten a_{ik} durch einen Linearteiler $\omega - \omega_1$ von $A(\omega)$ teilbar sind, so sind auch sämtliche b_{ik} durch diesen teilbar, und umgekehrt. Wenn $(\omega - \omega_1)^\lambda$ die höchste Potenz des Linearteilers ist, welche noch in allen a_{ik} enthalten ist, so ist eben diese auch die höchste in allen b_{ik} noch enthaltene Potenz und umgekehrt.

Nun hat man folgende Bezeichnung¹⁾ eingeführt: Sei $(\omega - \omega_1)^\lambda$ die höchste Potenz von $\omega - \omega_1$, welche in $A(\omega)$ selbst enthalten ist, $(\omega - \omega_1)^{\lambda_1}$ die höchste noch in allen Unterdeterminanten 1^{ter} Stufe von $A(\omega)$ enthaltene Potenz, $(\omega - \omega_1)^{\lambda_2}$ die höchste in allen Unterdeterminanten 2^{ter} Stufe, u. s. w. endlich $(\omega - \omega_1)^{\lambda_{p-1}}$ die höchste Potenz von $\omega - \omega_1$, welche in allen Unterdeterminanten $(p-1)$ ter Stufe von $A(\omega)$ enthalten ist, während die Unterdeterminanten p ter Stufe nicht mehr sämtlich durch $\omega - \omega_1$ teilbar sind. Dann nennt man

$$(\omega - \omega_1)^{\lambda - \lambda_1}, (\omega - \omega_1)^{\lambda_1 - \lambda_2}, \dots, (\omega - \omega_1)^{\lambda_{p-1}}$$

die p Elementarteiler der Determinante $A(\omega)$, in welche die λ te Potenz des λ -fachen Linearteilers $\omega - \omega_1$ gespalten ist. Denn es ist ja

$$(15) \quad (\omega - \omega_1)^\lambda = (\omega - \omega_1)^{\lambda - \lambda_1} \cdot (\omega - \omega_1)^{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \dots \cdot (\omega - \omega_1)^{\lambda_{p-1}}.$$

Mit Hülfe dieser Terminologie können wir nun das Resultat dieses Artikels, welches dasjenige des vorigen mitumfasst, auch dahin aussprechen:

Die Zerlegung der zu einem bestimmten Umlauf gehörigen Fundamentalgleichung in Elementarteiler ist unabhängig von dem zu ihrer Bildung benutzten Fundamentalsystem.

78. Grad der Unbestimmtheit des Gleichungssystems (7). Aus dem vorstehenden Resultat wollen wir noch eine Folgerung ziehen in Bezug auf den Grad der Unbestimmtheit des Gleichungssystems (7), welches uns zu der Fundamentalgleichung führte, und das wir zur Berechnung der $c_1 \dots c_n$, d. h. zur Berechnung des Integrals (5) mit der Eigenschaft (4) brauchen, wenn für ω eine Wurzel der Fundamentalgleichung eingesetzt wird.

Ein System linearer homogener Gleichungen heisst bekanntlich²⁾ einfach unbestimmt, wenn seine Determinante verschwindet, ohne dass alle ihre Unterdeterminanten erster Stufe verschwinden, zweifach

1) Weierstrass, Monatsberichte der Berliner Akademie 1868. S. 310 ff.

2) S. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. § 8. 2. S. 72 ff.

so man not very well assumed that the

unbestimmt, wenn alle Unterdeterminanten erster Stufe verschwinden, aber nicht alle zweiter Stufe u. s. w., weil sich alsdann die sämtlichen Unbekannten des Systems bezw. durch eine, zwei, u. s. w. willkürlich bleibende von ihnen linear und homogen ausdrücken. Nach dem vorangehenden Artikel können wir nun sagen:

Der Grad der Unbestimmtheit des Gleichungssystems (7), wenn für ω eine Wurzel der Fundamentalgleichung eingesetzt wird, ist unabhängig von dem zu seiner Bildung benutzten Fundamentalsystem.

Wenn nun für eine Wurzel $\omega = \omega_1$ der Fundamentalgleichung zuerst die Unterdeterminanten ρ^{ter} Stufe nicht sämtlich verschwinden, so ist also das Gleichungssystem (7) für $\omega = \omega_1$ ρ -fach unbestimmt. Andererseits ist dann nach (15) ρ die Anzahl der zu dem Linearteiler $\omega - \omega_1$ gehörigen Elementarteiler. Wir können also weiter aussagen:

Der Grad der Unbestimmtheit des Gleichungssystems (7), wenn für ω eine Wurzel der Fundamentalgleichung gesetzt wird, ist identisch mit der Anzahl der dieser Wurzel entsprechenden Elementarteiler.

79. Fundamentalgleichung für eine Stelle der Bestimmtheit und ihre Beziehung zur determinierenden Gleichung. Es wird dazu dienen, uns mit der Fundamentalgleichung noch vertrauter zu machen, wenn wir dieselbe für eine solche Stelle bilden, in deren Umgebung wir bereits ein Fundamentalsystem von Integralen besitzen, nämlich für eine Stelle der Bestimmtheit. Zugleich wird dabei die sich aufdrängende Frage, welche Beziehung zwischen der Fundamentalgleichung und der determinierenden Gleichung besteht, ihre Beantwortung finden.

Es sei also $x = 0$ jetzt eine Stelle der Bestimmtheit der Differentialgleichung (1). Zur Bildung der zugehörigen Fundamentalgleichung können wir nach Artikel 76, 77 das für die Umgebung eben dieser Stelle definierte Fundamentalsystem benutzen, welches nach Kap. IX in Untergruppen eingeteilt ist. Die letzteren wollen wir in der modifizierten Gestalt des Artikel 68 voraussetzen, wobei $\omega_1, \omega_2, \dots$ die schon im Artikel 51 eingeführte Bedeutung haben

$$(16) \quad \omega_\alpha \equiv e^{2r_\alpha \pi i} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n),$$

sodass allen Wurzeln r derselben Gruppe ein und dasselbe ω entspricht. Dann lautet das Coefficientensystem (α_{ik}) (s. Gl. (3)) für diese spezielle Wahl des Fundamentalsystems $y_1 \dots y_n$ derart, dass die Elemente der Hauptdiagonale $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ sind, links von jedem ω 1 steht, ausser wenn das betreffende ω von einem Integral erster Stufe herrührt, alle übrigen Elemente aber den Wert Null haben. Hiernach wird die Fundamentalgleichung

(17)

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\omega_1 - \omega} \\
 \boxed{\omega_1 - \omega} \\
 \begin{array}{cc}
 \omega_1 - \omega, & 0 \\
 1, & \omega_1 - \omega
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc}
 \omega_1 - \omega, & 0, & 0 \\
 1, & \omega_1 - \omega, & 0 \\
 0, & 1, & \omega_1 - \omega
 \end{array}
 \end{array}$$

wobei alle ausserhalb der durch besondere (nur zur Anschaulichkeit dienende) Linien eingerahmten Hauptunterdeterminanten stehenden Elemente Null sind und die eingerahmten Determinanten, soweit sie $\omega_1 - \omega$ in der Hauptdiagonale enthalten, sich zusammensetzen aus

$$\begin{array}{lll}
 \mu_0 & \text{Determinanten ersten Grades,} \\
 \mu_1 & \text{„ zweiten „,} \\
 \vdots & \vdots \\
 \mu_l & \text{„ } (l+1)^{\text{ten}} \text{ „,}
 \end{array}$$

entsprechend den einzelnen Untergruppen erster, zweiter, ..., $(l+1)^{\text{ter}}$ Stufe (s. Art. 67). Die dann folgenden eingerahmten Hauptunterdeterminanten in (17) sind entsprechend mit den von ω_1 verschiedenen Grössen ω_α gebildet.

Da hiernach die linke Seite der Fundamentalgleichung (17) das Produkt der eingerahmten Hauptunterdeterminanten ist und demnach den Wert hat

$$(18) \quad A(\omega) = (\omega_1 - \omega)(\omega_2 - \omega) \dots (\omega_n - \omega),$$

so sind die Zahlen ω_α die Wurzeln der Fundamentalgleichung. Wir haben daher zunächst das Resultat:

Bei einer Stelle der Bestimmtheit, deren determinierende Gleichung die Wurzeln $r_1 r_2 \dots r_n$ besitzt, sind

$$\omega_\alpha = e^{2r_\alpha \pi i} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

die Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichung. Einer Wurzelgruppe $r_1 r_2 \dots r_\lambda$ der ersteren und demgemäss einer Gruppe von λ Integralen des zugehörigen Fundamentalsystems entspricht daher ein λ -facher Linear-teiler der Fundamentalgleichung.

80. Beziehung zwischen den Integraluntergruppen bei einer Stelle der Bestimmtheit und den Elementarteilern der Fundamentalgleichung¹⁾. Wie wir im vorigen Artikel gesehen haben, dass den Integralgruppen eines Fundamentalsystems bei einer Stelle der Bestimmtheit die Linearteiler der Fundamentalgleichung entsprechen, können wir uns nunmehr noch davon überzeugen, dass den Integraluntergruppen die Elementarteiler entsprechen in der Weise, dass der Anzahl der Untergruppen einer Gruppe, die einem Linearteiler $\omega_1 - \omega$ entspricht, die gleiche Anzahl von Elementarteilern, in die $(\omega_1 - \omega)^2$ zerfällt, und jeder Untergruppe von bestimmter Stufe ein Elementarteiler von gleichem Grade gegenübersteht.

Zu dem Ende erinnern wir uns einerseits daran, dass die eingerahmten Hauptunterdeterminanten in (17) nach Zahl und Grad den Untergruppen nach Zahl und Stufe entsprechen. Andererseits werden wir zeigen, dass jede dieser Unterdeterminanten zu einem Elementarteiler gleichen Grades führt, womit der Beweis unserer Behauptung dann erbracht ist.

Wir erhalten aus der Determinante (17) Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe, wenn wir ν Zeilen und ν Columnen streichen. Zunächst ist leicht zu sehen, dass, wenn bei diesen Streichungen eines der eingerahmten Quadrate in ein Rechteck übergeht, die entstehende Unterdeterminante ν^{ter} Stufe identisch Null ist. Denkt man sich nämlich alsdann das Rechteck durch geeignete Zeilen- und Columnen-Vertauschungen etwa in die linke obere Ecke der ganzen Determinante gerückt, so steht unter, bzw. rechts neben diesem Rechteck ein anderes Rechteck, dessen Elemente sämtlich Null sind und bei dem die Zahl der Zeilen und Columnen zusammen $> n - \nu$, d. h. grösser als die Ordnung der Determinante, ist. Die betreffende Unterdeterminante ν^{ter} Stufe hat demnach den Wert Null²⁾.

Um die Elementarteiler der Determinante (17) aufzusuchen, brauchen wir daher nur solche Unterdeterminanten derselben in's Auge zu fassen, bei denen nach den Zeilen- und Columnenstreichungen innerhalb der Einrahmungen immer noch quadratische Systeme stehen, mit andern Worten, bei denen nur solche Reihenpaare (Zeile und Colonne) gestrichen sind, die sich innerhalb der eingerahmten Hauptunterdeterminanten kreuzen. Die höchste Potenz von $\omega_1 - \omega$, welche in sämtlichen Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe enthalten ist, finden wir,

1) Vergl. Sauvage, Annales de l'École normale supérieure, 3^{me} Série, t. 8. (1891). S. 312 ff.

2) Vergl. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. 5. Aufl. § 4. 2. S. 33.

wenn wir diejenige Unterdeterminante ν^{ter} Stufe von (17) aufsuchen, die nicht identisch Null ist und den Faktor $\omega_1 - \omega$ in möglichst niedriger Potenz enthält. Betrachtet man aber eine der eingerahmten Hauptunterdeterminanten für sich

$$\begin{vmatrix} \omega_1 - \omega, & 0 & 0 & \dots, & 0, & 0 \\ 1 & , & \omega_1 - \omega, & 0 & \dots, & 0, & 0 \\ 0 & , & 1 & , & \omega_1 - \omega, & \dots, & 0, & 0 \\ . & & . & & . & \dots, & . & . \\ 0 & , & 0 & , & 0 & \dots, & 1, & \omega_1 - \omega \end{vmatrix},$$

so erkennt man, dass durch Streichung der ersten Zeile und letzten Colonne diese Determinante den Wert 1 erhält, der Grad von $\omega_1 - \omega$ also um möglichst viel erniedrigt wird. Nimmt man also diese Streichung bei ν eingerahmten Hauptunterdeterminanten möglichst hoher Grade vor, so erhält man eine Unterdeterminante ν^{ter} Stufe, die nicht identisch Null ist und den Faktor $\omega_1 - \omega$ in möglichst niedriger Potenz, etwa $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu}$, enthält. Alle andern Unterdeterminanten enthalten diesen Faktor in gleicher oder höherer Potenz; also ist $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu}$ die höchste Potenz von $\omega_1 - \omega$, welche in *sämtlichen* Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe als Faktor enthalten ist. Auf diese Weise findet man die gemeinschaftlichen Faktoren

$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda_1}, (\omega_1 - \omega)^{\lambda_2}, \dots$$

aller Unterdeterminanten bzw. erster, zweiter u. s. w. Stufe. Hat man endlich bei sämtlichen ν_0 Hauptunterdeterminanten, die $\omega_1 - \omega$ in der Hauptdiagonale haben, diese Streichung vorgenommen, so erhält man daher eine Unterdeterminante ν_0^{ter} Stufe von $A(\omega)$ in (17), die gar nicht mehr durch $\omega_1 - \omega$ teilbar ist; d. h. λ_{ν_0} ist Null. Die Differenzen der Zahlen $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu_0}$ ($= 0$)

$$\lambda - \lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu_0 - 1}$$

sind demnach die Grade der Elementarteiler von $A(\omega)$, welche zu dem λ -fachen Lincarteiler $(\omega_1 - \omega)^\lambda$ gehören.

Andererseits entsteht aus $A(\omega)$, welches durch $(\omega_1 - \omega)^\lambda$ teilbar ist, nach dem Obigen durch Streichung der ersten Zeile und letzten Colonne in einer Hauptunterdeterminante höchsten Grades eine Unterdeterminante erster Stufe, welche nur noch durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_1}$ teilbar ist. Durch diese Streichung hat die betreffende Hauptunterdeterminante also den Faktor $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \lambda_1}$ verloren und war somit vorher vom Grade $\lambda - \lambda_1$, u. s. w. Auf diese Weise ergibt sich, dass die Zahlen

$$\lambda - \lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu_0 - 1}$$

auch die Grade der einzeln eingerahmten Hauptunterdeterminanten und damit die Stufenzahl der einzelnen Untergruppen der Gruppe Γ liefern.

Wir haben daher die ausgesprochene Behauptung erwiesen:

Bei einer Stelle der Bestimmtheit entspricht die Zerlegung einer dem λ -fachen Lineartheiler $\omega_1 - \omega$ der Fundamentalgleichung zugeordneten Integralgruppe in Untergruppen nach Zahl und Stufe der letzteren der Zerfällung von $(\omega_1 - \omega)^2$ in Elementarteiler nach Zahl und Grad derselben.

Kapitel XII.

Die Integrale in einem Kreisring.

§1. Die Integrale bei Verschiedenheit sämtlicher Wurzeln der Fundamentalgleichung¹⁾. Wie wir bei Stellen der Bestimmtheit in einem kreisförmigen Gebiet mittelst Recursionsformel und determinierender Gleichung ein Fundamentalsystem von Integralen wirklich aufstellen konnten, so wollen wir nun mit Hülfe der Fundamentalgleichung wenigstens die analytische Gestalt der Integrale in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit und überhaupt in einem Kreisring ermitteln.

Es sei $x = 0$ der Mittelpunkt eines Kreisringes U , dessen Fläche von singulären Punkten der Differentialgleichung

$$(1) \quad P(x, y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

frei ist. Zu einem Umlauf auf einem innerhalb U verlaufenden, den Begrenzungskreisen von U concentrischen Kreise gehöre die Fundamentalgleichung

$$(2) \quad A(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \dots & \alpha_{n1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Ist nun $\omega = \omega_1$ eine Wurzel dieser Gleichung, so existiert mindestens ein dem Gleichungssystem (voriges Kap., (7))

$$(3) \quad \begin{cases} (\alpha_{11} - \omega_1)c_1 + \dots + \alpha_{n1}c_n = 0 \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \alpha_{1n}c_1 + \dots + (\alpha_{nn} - \omega_1)c_n = 0 \end{cases}$$

genügendes System von Zahlen c_1, c_2, \dots, c_n , die nicht sämtlich Null sind, mithin, wenn y_1, \dots, y_n irgend ein in der Umgebung eines in U gelegenen, also regulären Punktes x_0 definiertes Fundamentalsystem bedeuten, ein Integral η_1 der Gleichung (1)

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. (1866) S. 134 ff.

$$(4) \quad \eta_1 \equiv c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n,$$

dessen Umlaufsrelation bei dem betrachteten Weg

$$(5) \quad \bar{\eta}_1 \equiv \omega_1 \eta_1$$

lautet.

Die analytische Gestalt eines Integrals mit dieser Umlaufsrelation ist leicht aus der letzteren abzuleiten. Setzt man

$$(6) \quad r_1 \equiv \frac{1}{2\pi i} \log \omega_1,$$

unter r_1 einen beliebigen der unendlich vielen, aber nur um ganze Zahlen verschiedenen Werte der rechten Seite von (6) verstehend, so multipliziert sich die Function

$$x^{r_1}$$

bei dem Umlauf, der ja den Punkt $x = 0$ einschliesst, wie η_1 nur mit der Constanten ω_1 . Der Quotient

$$\frac{\eta_1}{x^{r_1}}$$

ist daher eine innerhalb U eindeutige Function. Da aber U nur aus regulären Punkten besteht, so ist η_1 innerhalb U auch allenthalben endlich, stetig und besitzt in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung. Das Gleiche gilt von x^{r_1} , folglich von dem Quotienten, der überdies eindeutig ist. Der letztere ist also nach dem Laurent'schen Satz durch eine innerhalb des Ringes U convergente Reihe darstellbar, die nur ganze Potenzen von x , aber im allgemeinen unendlich viele Potenzen mit negativem Exponenten enthält,

$$\frac{\eta_1}{x^{r_1}} \equiv \varphi_1(x).$$

Das Integral η_1 hat also innerhalb U die analytische Gestalt

$$(7) \quad \eta_1 \equiv x^{r_1} \varphi_1(x),$$

wo $r_1 \equiv \frac{1}{2\pi i} \log \omega_1$, $\varphi_1(x)$ eine innerhalb U eindeutige Function mit im allgemeinen unendlich vielen negativen Potenzen ist.

Besitzt φ_1 wirklich unendlich viele negative Potenzen, so müssen wir sagen, die Reihe η_1 verhalte sich in dem Kreisring um $x=0$, bezw. — wenn dieser die Umgebung von $x=0$ darstellt — in der Umgebung von $x=0$, oder kurz, bei $x=0$, oder endlich, alle Fälle zusammenfassend, in Bezug auf $x=0$ unbestimmt.

Sind nun die n Wurzeln der Fundamentalgleichung (2)

$$\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$$

sämtlich von einander verschieden, so erhalten wir auf diese Art n Integrale

$$(8) \quad \eta_1 \equiv x^{r_1} \varphi_1(x), \quad \eta_2 \equiv x^{r_2} \varphi_2(x), \dots, \eta_n \equiv x^{r_n} \varphi_n(x),$$

wo

$$(9) \quad r_\alpha \equiv \frac{1}{2\pi i} \log \omega_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

und $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$ innerhalb U eidentige Functionen sind. Diese n Integrale sind aber linear unabhängig. Denn es können sich nicht zwei der Zahlen r um eine ganze Zahl oder Null von einander unterscheiden, weil sonst zwei der ω einander gleich wären. Folglich enthält jede der n Reihen (8) andere Potenzen von x als alle übrigen, woraus nach Satz 2 des Anhangs, Zu Kap. IV, die lineare Unabhängigkeit der Reihen folgt.

Ist nun $x = 0$ Stelle der Unbestimmtheit oder liegt auf der inneren Begrenzungsperipherie von U , bzw. innerhalb derselben, ohne mit $x = 0$ identisch zu sein, ein wirklich singulärer Punkt (s. Art. 34), so muss mindestens eine der Reihen (8) sich thatsächlich unbestimmt verhalten. Denn andernfalls hätten wir ja n linear unabhängige, sich bestimmt verhaltende Integrale. $x = 0$ wäre also nach Kap. X Stelle der Bestimmtheit und, da die Reihen (8) dann ihrer analytischen Gestalt zufolge in dem ganzen Innern des äusseren Begrenzungskreises gültig wären¹⁾, müsste dieses ganze Kreissinnere -- abgesehen höchstens von $x = 0$ selbst -- von wirklich singulären Punkten frei sein.

Wir haben daher zunächst das Resultat:

In einem Kreisring U mit dem Mittelpunkt $x = 0$, dessen Fläche von singulären Punkten frei ist, existiert bei Verschiedenheit sämtlicher Wurzeln $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$ der zugehörigen Fundamentalgleichung ein Fundamentalsystem von Integralen

$$\eta_1 \equiv x^{r_1} \varphi_1(x), \dots, \eta_n \equiv x^{r_n} \varphi_n(x),$$

wo

$$r_\alpha \equiv \frac{1}{2\pi i} \log \omega_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n),$$

und die φ innerhalb U eidentig sind, aber sich im allgemeinen unbestimmt verhalten. -- Ist insbesondere $x = 0$ Stelle der Unbestimmtheit (U also z. B. die Umgebung derselben) oder liegt auf der inneren Begrenzungsperipherie von U , bzw. innerhalb derselben ein von $x = 0$ verschiedener wirklich singulärer Punkt, so verhält sich sicher mindestens eine der Reihen (8) unbestimmt.

1) Denn die Reihen (8) enthielten nach Abtrennung der Faktoren x^r dann nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen.

gleichung von (13) besteht. Zu dem Ende bilden wir die Fundamentalgleichung von (1) mittelst eines Fundamentalsystems, das aus $y_1 y_2 \dots y_n$ entsteht, wenn eines dieser Integrale durch η_1 ersetzt wird. Da nämlich in (4) nicht alle $c = 0$ sind, können wir annehmen, dass etwa $c_1 \neq 0$ sei. Dann bilden aber die Integrale

$$(14) \quad \eta_1 y_2 y_3 \dots y_n$$

ein Fundamentalsystem, weil jedes Integral durch $y_1 y_2 \dots y_n$, y_1 aber wiederum durch $\eta_1 y_2 \dots y_n$ ausdrückbar ist. Benutzt man (14) zur Bildung der Fundamentalgleichung von (1), so lautet dieselbe, wenn dabei die Umlaufkoeffizienten von $y_2 \dots y_n$ mit β_{ik} bezeichnet werden,

$$(15) \quad A(\omega) = \begin{vmatrix} \omega_1 - \omega, & \beta_{21}, & \dots, & \beta_{n1} \\ 0, & \beta_{22} - \omega, & \dots, & \beta_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0, & \beta_{2n}, & \dots, & \beta_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

sodass

$$(16) \quad A(\omega) = (\omega_1 - \omega) \begin{vmatrix} \beta_{22} - \omega, & \dots, & \beta_{n2} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \beta_{2n} & \dots, & \beta_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

Um nun die Fundamentalgleichung $A_1(\omega) = 0$ der Gleichung (13) zu bilden, erinnern wir uns daran (s. Art. 29), dass die $n-1$ Functionen

$$(17) \quad z_2 = \frac{dy_2}{dx \eta_1}, \quad z_3 = \frac{dy_3}{dx \eta_1}, \dots, z_n = \frac{dy_n}{dx \eta_1}$$

ein Fundamentalsystem von (13) bilden. Die Umlaufsrelationen derselben sind leicht zu ermitteln. Es ist ja (s. Gl. (15))

$$(18) \quad \begin{cases} \left(\frac{y_n}{\eta_1} \right) = \frac{\beta_{21}}{\omega_1} + \frac{\beta_{22}}{\omega_1} \frac{y_2}{\eta_1} + \dots + \frac{\beta_{2n}}{\omega_1} \frac{y_n}{\eta_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \left(\frac{y_n}{\eta_1} \right) = \frac{\beta_{n1}}{\omega_1} + \frac{\beta_{n2}}{\omega_1} \frac{y_2}{\eta_1} + \dots + \frac{\beta_{nn}}{\omega_1} \frac{y_n}{\eta_1} \end{cases}$$

Da nun

$$\bar{z}_i = \frac{d}{dx} \left(\frac{y_i}{\eta_1} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y_i}{\eta_1} \right) \quad (i=2, 3, \dots, n-1),$$

so erhält man aus (18) durch Differentiation nach x

$$(19) \quad \begin{cases} \bar{z}_2 \equiv \frac{\beta_{22}}{\omega_1} z_2 + \dots + \frac{\beta_{2n}}{\omega_1} z_n \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \bar{z}_n \equiv \frac{\beta_{n2}}{\omega_1} z_2 + \dots + \frac{\beta_{nn}}{\omega_1} z_n \end{cases}$$

und folglich als Fundamentalgleichung von (13)

$$(20) \quad A_1(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\beta_{22}}{\omega_1} - \omega, & \dots, & \frac{\beta_{n2}}{\omega_1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\beta_{2n}}{\omega_1}, & \dots, & \frac{\beta_{nn}}{\omega_1} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit ω_1^{n-1} , indem man in der Determinante jedes Element mit ω_1 multipliziert, so folgt aus der Vergleichung mit (16)

$$(21) \quad \omega_1^{n-1} A_1(\omega) \equiv \frac{A(\omega \omega_1)}{\omega_1 - \omega \omega_1}.$$

Sind also $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$, wo $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_\lambda$, die Wurzeln von $A(\omega) = 0$, so sind diejenigen von $A_1(\omega) = 0$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}, \dots, \frac{\omega_\lambda}{\omega_1}, \dots, \frac{\omega_n}{\omega_1},$$

von denen die $\lambda - 1$ ersten den Wert 1 haben. Dieses Ergebnis, welches in bemerkenswerter Weise an ein für die determinierende Gleichung in Artikel 47 abgeleitetes erinnert, sprechen wir dahin aus:

Der λ -fachen Wurzel ω_1 der Fundamentalgleichung der vorgelegten Differentialgleichung (1) entspricht die $(\lambda - 1)$ -fache Wurzel 1 der Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (13).

83. Integralgruppen entsprechend den mehrfachen Linearteilern der Fundamentalgleichung. Aus dem vorstehenden Resultat folgt nun, wie vorher, dass die Differentialgleichung $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung in z (13) ein innerhalb U eindeutiges Integral ξ_2 besitzt, mithin die vorgelegte Differentialgleichung (1) nach (11) das Integral

$$\eta_2 \equiv \eta_1 \int \xi_2 dx.$$

Mit der Differentialgleichung (13) wird alsdann geradeso verfahren, wie oben mit (1), sodass man ein Integral derselben

$$\xi_3 \int \vartheta_3 dx$$

findet, wo ϑ_3 innerhalb U eindeutig ist, also für (1) das Integral

$$\eta_3 \equiv \eta_1 \int \xi_2 dx \int \vartheta_3 dx$$

tionen $\varphi_{\alpha\beta}$ (vergl. Art. 51. 52) können wir zwar nicht in derselben Weise wie in Art. 51, aber hier wie dort mittelst der soeben gemachten Bemerkung über die willkürlichen Integrationsconstanten in (22) (s. dort Art. 50) ableiten. Wir wollen indessen dies hier nicht näher ausführen, weil sich die gedachten Relationen bei der nachfolgenden Zerlegung der Gruppen in Untergruppen einfacher und vollständiger ergeben. Unmittelbar sieht man jedoch, dass nach dem Umlauf jedes Integral derselben Gruppe angehört wie vorher.

Verfährt man nun wie bei ω_1 bei allen Wurzeln der Fundamentalgleichung, so erhält man im ganzen n Integrale, da jeder mehrfachen Wurzel eine Integralgruppe von gleicher Gliederzahl zugeordnet ist. Der Nachweis, dass dieselben ein Fundamentalsystem bilden, erfolgt wieder in der gewohnten Weise. Die Integrale einer Gruppe sind linear unabhängig nach ihrer Erzeugungsart (s. Art. 30); zwischen den Integralen verschiedener Gruppen ist aber eine lineare Relation deshalb unmöglich, weil die in einer Gruppe auftretenden Reihen nur solche Potenzen von x enthalten, die in keiner andern Gruppe vorkommen¹⁾, da die den verschiedenen Wurzeln ω_α entsprechenden Zahlen r_α sich nicht um ganze Zahlen von einander unterscheiden.

Wir haben daher das Resultat:

Besitzt die zu einem Umlauf innerhalb U etwa auf einem zu den Begrenzungskreisen concentrischen Kreise gehörige Fundamentalgleichung mehrfache Wurzeln, so existiert ein innerhalb U gültiges Fundamentalsystem von Integralen, welches entsprechend den Lincarteilern der Fundamentalgleichung in Gruppen Γ der Gestalt (22) bzw. (22^a) gesondert ist, sodass jedem λ -fachen Lincarteiler eine aus λ Integralen bestehende Gruppe zugeordnet ist. Die Integrale verhalten sich im allgemeinen unbestimmt in Bezug auf $x = 0$, mindestens eines von ihnen sicher, wenn die am Schluss des Satzes in Art. 81 angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Aus dem letzteren Grunde ist also der Gültigkeitsbereich eines Fundamentalsystems bei einer Stelle der Unbestimmtheit stets nur ein Kreisring, nicht ein Kreis (s. Art. 75).

84. Sämtliche Integrale erster Stufe in einer Gruppe²⁾. Wir haben bisher die Fundamentalgleichung in einer der Untersuchung des Kapitel VII bei Stellen der Bestimmtheit völlig parallel laufenden Weise verwandt. Sie ersetzt uns, was dort durch die determinierende Gleichung und die Recursionsformel geleistet wurde. Dieser Paralle-

1) S. Anhang, Zu Kap. IV. Satz 6.

2) Vergl. zu diesem und den zwei folgenden Artikeln Hamburger, Crelles Journ. Bd. 76. (1873). S. 117 ff.

des Linearteilers $(\omega_1 - \omega)^2$ der Fundamentalgleichung ist, so existieren genau v_0 linear unabhängige Integrale erster Stufe der Gruppe I' innerhalb U

$$y_{01} \equiv x^{r_1} \varphi_{01}, \dots, y_{0v_0} \equiv x^{r_1} \varphi_{0v_0},$$

oder v_0 Integrale, welche sich bei dem Umlauf am einfachsten verhalten, indem sie sich nur mit ω_1 multiplizieren.

85. Sämtliche Integrale einer Gruppe nach ihrer Stufenzahl geordnet. Wenn wir nunmehr nach den Integralen der Gruppe I' fragen, welche sich nächst denen von der ersten Stufe am einfachsten bei dem Umlauf verhalten, so setzen wir dabei voraus, dass $\lambda > v_0$, da wir sonst ja schon λ linear unabhängige Integrale der Gruppe I' hätten, die sämtlich erster Stufe wären. Der Fall $\lambda = v_0$ erfordert aber, dass $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_l = 0$, d. h. $\lambda = \mu_0$, oder dass $(\omega_1 - \omega)^2$ in λ einfache Elementarteiler zerfällt.

Wir gehen nun von dem Fundamentalsystem

$$(27) \quad y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0v_0}, y_{v_0+1}, \dots, y_n$$

aus, bei dem die v_0 soeben ermittelten Integrale erster Stufe an Stelle von $y_1 y_2 \dots y_{v_0}$ getreten sind. Dass die n Integrale (27) wirklich ein Fundamentalsystem bilden, sieht man aus (25): man kann ja die Integrale $y_1 y_2 \dots y_{v_0}$ durch die Integrale (27) ausdrücken, folglich jedes beliebige Integral ebenso. Behalten wir für die Umlaufscoeffizienten der $n - v_0$ letzten Integrale in (27) die alten Zeichen (α_{ik}) bei, so lauten die Umlaufsrelationen des Fundamentalsystems (27)

$$(28) \quad \begin{cases} y_{01} & \dots & \omega_1 y_{01} \\ y_{02} & & \omega_1 y_{02} \\ \cdot & & \cdot \\ y_{0v_0} & & \omega_1 y_{0v_0} \\ y_{v_0+1} & \dots & \alpha_{v_0+1,1} y_{01} + \dots + \alpha_{v_0+1,v_0} y_{0v_0} + \alpha_{v_0+1,v_0+1} y_{v_0+1} + \dots + \alpha_{v_0+1,n} y_n \\ \cdot & & \cdot \\ y_n & \dots & \alpha_{n1} y_{01} + \dots + \alpha_{nv_0} y_{0v_0} + \alpha_{n,v_0+1} y_{v_0+1} + \dots + \alpha_{nn} y_n \end{cases}$$

Hiernach nimmt die Fundamentalgleichung, mittelst (27) gebildet, die Gestalt an

$$(2^a) \quad A(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \omega_1 - \omega, & \dots, & 0, & \alpha_{v_0+1,1}, & \dots, & \alpha_{n1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0, & \dots, & \omega_1 - \omega, & \alpha_{v_0+1,v_0}, & \dots, & \alpha_{nv_0} \\ 0, & \dots, & 0, & \alpha_{v_0+1,v_0+1} - \omega, & \dots, & \alpha_{n,v_0+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0, & \dots, & 0, & \alpha_{v_0+1,n}, & \dots, & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

sodass

$$(29) \quad A(\omega) \equiv (\omega_1 - \omega)^{\nu_0} A'(\omega),$$

wo

$$(30) \quad A'(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{r_0+1, r_0+1} - \omega & \dots & \alpha_{n, r_0+1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{r_0+1, n} & \dots & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

Da $\lambda > \nu_0$ sein sollte, enthält $A'(\omega)$ den Linearteiler $\omega_1 - \omega$ noch in der Potenz $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \nu_0}$. Wir können aber nach einem von Casorati herrührenden Satz¹⁾ sogar aussagen:

Die Determinante $A'(\omega)$ enthält jeden zu $\omega_1 - \omega$ gehörigen Elementarteiler in einem um Eins niedrigeren Grad als $A(\omega)$.

$A'(\omega)$ hat demnach (s. Art. 84)

$$\begin{array}{llll} \mu_1\text{-mal den Elementarteiler } (\omega_1 - \omega) & & & \\ \mu_2\text{-} & \text{,,} & \text{,,} & (\omega_1 - \omega)^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_l\text{-} & \text{,,} & \text{,,} & (\omega_1 - \omega)^l, \end{array}$$

und die Anzahl der Elementarteiler von $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \nu_0}$ in $A'(\omega)$ ist

$$\nu_1 \equiv \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_l \equiv \nu_0 - \mu_0.$$

Um nun Integrale zu suchen, die sich nächst denen der ersten Stufe am einfachsten beim Umlauf ändern, setzen wir

$$(31) \quad \eta' \equiv c'_{r_0+1} y_{r_0+1} + \dots + c'_n y_n,$$

wo die c' noch unbestimmt sind, sodass nach (28) die Umlaufsrelation dieses Integrals lautet:

$$(32) \quad \overline{\eta'} \equiv (c'_{r_0+1} \alpha_{r_0+1, 1} + \dots + c'_n \alpha_{n1}) y_{01} + \dots + (c'_{r_0+1} \alpha_{r_0+1, r_0} + \dots + c'_n \alpha_{nr_0}) y_{0r_0} \\ + (c'_{r_0+1} \alpha_{r_0+1, r_0+1} + \dots + c'_n \alpha_{n, r_0+1}) y_{r_0+1} + \dots + (c'_{r_0+1} \alpha_{r_0+1, n} + \dots + c'_n \alpha_{nn}) y_n.$$

η' geht also bei dem Umlauf in eine lineare homogene Function der Integrale erster Stufe $y_{01} \dots y_{0r_0}$ und in eine ebensolche der Integrale y_{r_0+1}, \dots, y_n über. Da wir bereits alle Integrale erster Stufe von Γ besitzen, würden wir zu einem neuen Resultat nicht kommen, wenn wir jetzt verlangten, es sollte $\eta' \equiv \omega_1 \eta'$ sein, was das identische Verschwinden der ersten Zeile von (32) rechts erfordern würde. Die

1) Beweis im Anhang. — Von Casorati rührt auch die auf diesem Satz beruhende Vervollständigung des Hamburger'schen Verfahrens her. Vergl. Comptes rendus hebdom. de l'académie des sciences de Paris, t. 92. (1881). S. 175—178 u. S. 238—241.

einfachste neue Forderung, die wir stellen können, ist darum die, es soll $\bar{\eta}'$ abgesehen von einer hinzutretenden linearen homogenen Function von $y_{01} \dots y_{0r_0}$ den Wert $\omega_1 \eta'$ erhalten, d. h. es sollen die c' so bestimmt werden, dass die Gleichungen

$$(33) \quad \begin{cases} c'_{r_0+1} \alpha_{r_0+1, r_0+1} + \dots + c'_n \alpha_{n, r_0+1} = \omega_1 c'_{r_0+1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c'_{r_0+1} \alpha_{r_0+1, n} + \dots + c'_n \alpha_{nn} = \omega_1 c'_n \end{cases}$$

erfüllt werden. Dies ist aber möglich, weil die Determinante dieses Systems linearer homogener Gleichungen die verschwindende Determinante $A'(\omega_1)$ ist. Und da ν_1 die Zahl der Elementarteiler des Linearteilers $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - r_0}$ von $A'(\omega)$ ist, so ist das System (33) ν_1 -fach unbestimmt. Bezeichnen wir die ν_1 willkürlich bleibenden der Coefficienten c'_{r_0+1}, \dots, c'_n , durch welche sich alle übrigen linear und homogen ausdrücken, mit

$$C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1r_1},$$

so wird

$$(34) \quad \eta' = C_{11} y_{11} + C_{12} y_{12} + \dots + C_{1r_1} y_{1r_1},$$

wo $y_{11} y_{12} \dots y_{1r_1}$ ν_1 linear unabhängige Integrale sind. Das Letztere ergibt sich ebenso wie bei $y_{01} \dots y_{0r_0}$ im vorigen Artikel. (34) stellt daher, wenn noch das allgemeinste Integral erster Stufe von Γ addiert wird, das allgemeinste Integral dar, welches sich beim Umlauf mit ω_1 multipliziert und um eine lineare homogene Verbindung der Integrale erster Stufe der Gruppe Γ vermehrt; $y_{11} y_{12} \dots y_{1r_1}$ aber sind ν_1 linear unabhängige Integrale derselben Art, aus denen man umgekehrt durch Composition mit ν_1 willkürlichen Constanten und durch Hinzufügung des allgemeinsten Integrals erster Stufe von Γ wieder das allgemeinste Integral der betrachteten Art bilden kann.

Die ν_1 Integrale $y_{11} \dots y_{1r_1}$ sind aber nicht nur unter einander, sondern auch von den $y_{01} \dots y_{0r_0}$ linear unabhängig, weil eine Relation zwischen $y_{01} \dots y_{0r_0}, y_{11} \dots y_{1r_1}$ eine solche zwischen den Elementen des Fundamentalsystems (27) bedeuten würde. Bezeichnet man ferner die linearen homogenen Functionen von $y_{01} \dots y_{0r_0}$, um die sich $y_{11} \dots y_{1r_1}$ beim Umlauf vermehren, und die sich aus (32) ergeben, bezw. mit

$$L_{11}(y_{01} \dots y_{0r_0}), \dots, L_{1r_1}(y_{01} \dots y_{0r_0}),$$

sodass

$$(35) \quad \bar{y}_{1\alpha} = \omega_1 y_{1\alpha} + L_{1\alpha}(y_{01}, \dots, y_{0r_0}) \quad (\alpha = 1, \dots, r_1),$$

so sind auch L_{11}, \dots, L_{1r_1} linear unabhängig. Bestände nämlich eine Relation

$$l_1 L_{11} + l_2 L_{12} + \dots + l_{r_1} L_{1r_1} \equiv 0,$$

so wäre nach (35)

$$\overline{l_1 y_{11} + \dots + l_{r_1} y_{1r_1}} \equiv \omega_1 (l_1 y_{11} + \dots + l_{r_1} y_{1r_1}).$$

Demnach müsste $l_1 y_{11} + \dots + l_{r_1} y_{1r_1}$ ein Integral erster Stufe von Γ und daher durch die $y_{01} \dots y_{0r_0}$ ausdrückbar sein, während doch die $y_{11} \dots y_{1r_1}$ und $y_{01} \dots y_{0r_0}$, wie wir soeben sahen, linear unabhängig sind.

Wir können daher die ν_1 Integrale $L_{11} \dots L_{1r_1}$ geradezu an Stelle von ν_1 der $y_{01} \dots y_{0r_0}$ setzen, sodass von diesen dann noch $\nu_0 - \nu_1$ übrig bleiben, die untereinander und von den L unabhängig sind. Behalten wir dann aber statt der L die alten Zeichen bei und nehmen an, dass etwa gerade die ν_1 ersten der y_0 durch die L ersetzt wurden, so besitzen wir jetzt ausser den ν_0 Integralen $y_{01} \dots y_{0r_0}$ die ν_1 Integrale $y_{11} \dots y_{1r_1}$, deren Umlaufsrelationen lauten

$$(35^a) \quad \overline{y_{1\alpha}} \equiv \omega_1 y_{1\alpha} + y_{0\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r_1).$$

Hieraus folgert man aber leicht, dass $y_{1\alpha}$ derselben Gruppe Γ angehört wie $y_{0\alpha}$, da andernfalls (35^a) eine lineare homogene Relation zwischen Integralen verschiedener Gruppen wäre, die nach Satz 6 des Anhangs, Zu Kap. IV, ausgeschlossen ist.

Ist nun $\nu_0 + \nu_1 = \lambda$, so besitzen wir bereits λ linear unabhängige Integrale der Gruppe Γ . Andernfalls operieren wir mit dem Fundamentalsystem

$$y_{01} \dots y_{0r_0}, \quad y_{11} \dots y_{1r_1}, \quad y_{r_0+r_1+1} \dots y_n$$

weiter, wobei

$$A(\omega) \equiv (\omega_1 - \omega)^{\nu_0 + \nu_1} A''(\omega)$$

wird und $A''(\omega)$ nach dem Casorati'schen Satz nur noch

$$\nu_2 \equiv \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_l$$

Elementarteiler entsprechend dem Linearteiler $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \nu_0 - \nu_1}$ hat. Daher erhält man jetzt ν_2 linear unabhängige Integrale

$$y_{21} \ y_{22} \dots y_{2\nu_2}$$

mit den Umlaufsrelationen

$$(36) \quad \overline{y_{2\alpha}} \equiv \omega_1 y_{2\alpha} + L_{2\alpha}(y_{01} \dots y_{0r_0}, y_{11} \dots y_{1r_1}) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \nu_2).$$

Diese $L_{2\alpha}$ sind wieder linear unabhängig und können an Stelle von ν_2 der $y_{11} \dots y_{1r_1}$ gesetzt werden, (wobei gleichzeitig ν_2 der $y_{01} \dots y_{0r_0}$ durch ν_2 linear unabhängige Verbindungen derselben ersetzt werden) sodass die Umlaufsrelationen (36) die Gestalt annehmen

$$(36^a) \quad \overline{y_{2\alpha}} \equiv \omega_1 y_{2\alpha} + y_{1\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \nu_2).$$

innerhalb U eindeutige, sich im allgemeinen unbestimmt verhaltende Reihen sind. Es kommt also nur noch darauf an, die Stufenzahl der einzelnen Integrale zu bestimmen. Nach der allgemeinen Umlaufformel eines logarithmenbehafteten Integrals y , das einer der Zahl ω_1 zugeordneten Gruppe angehört, (s. Art. 56 (6)) ist nun

$$\bar{y} - \omega_1 y$$

ein Integral von einer um Eins niedrigeren Stufe als y . Hieraus folgt nach (38), da die Integrale $y_{0\alpha}$ erster Stufe sind, dass alle Integrale $y_{11} \dots y_{1\nu_1}$ zweiter Stufe sind; hieraus wieder vermöge (38), dass alle Integrale $y_{21} \dots y_{2\nu_2}$ von der dritten Stufe u. s. f., endlich, dass die Integrale $y_{l1} \dots y_{l\nu_l}$ von der $(l+1)^{\text{ten}}$ Stufe sind. Also:

Die Integrale

$$y_{\alpha 1} y_{\alpha 2} \dots y_{\alpha \nu_\alpha} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, l)$$

sind Integrale $(\alpha+1)^{\text{ter}}$ Stufe, d. h. sie haben die Form

$$y_{\alpha p} \equiv x^{r_1} [\varphi_{\alpha\alpha}^{(\beta)} + \varphi_{\alpha\alpha-1}^{(\beta)} \log x + \dots + \varphi_{\alpha 0}^{(\beta)} \log^\alpha x],$$

wo die φ innerhalb U eindeutige Reihen sind.

Weiter sind aber die Integrale (37) auch bereits in *Untergruppen* gesondert. Betrachtet man nämlich alle Integrale, die in (37) in derselben Colonne stehen, welche also gleichen zweiten Index haben, so sind dieselben bezw. 1^{ter} , 2^{ter} , 3^{ter} u. s. w. Stufe. Nach (38) multipliciert sich das erste Integral dieser Colonne beim Umlauf mit ω_1 , während jedes andere sich mit ω_1 multipliciert und um das vorhergehende vermehrt. Die Integrale einer jeden Colonne von (37) bilden daher Untergruppen und zwar von der in Artikel 68 behandelten Art.

Die Anzahl der Untergruppen erster Stufe ist daher (s. Tabelle (37)) $\nu_0 - \nu_1 \equiv \mu_0$, die der Untergruppen zweiter Stufe $\nu_1 - \nu_2 \equiv \mu_1$, u. s. w., endlich die Anzahl der Untergruppen $(l+1)^{\text{ter}}$ Stufe $\nu_l \equiv \mu_l$. Die Zahlen $\mu_0 \mu_1 \dots \mu_l$ waren aber die Zahlen der Elementarteiler bezw. ersten, zweiten u. s. w., $(l+1)^{\text{ten}}$ Grades. Wir können somit das Ergebnis der letzten Untersuchungen in dem höchst eleganten Satz ¹⁾ zusammenfassen, den wir für Stellen der Bestimmtheit schon im Artikel 80 gefunden hatten:

1) Vergl. dazu ausser den schon genannten Arbeiten von Hamburger und Casorati noch

Stickelberger, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, Akad. Antrittsschrift, Leipzig, 1881.

Sauvage, Annales de l'école normale, 3^{me} série, t. 8. (1891). S. 323 ff.

von Koch, Acta Math. Bd. 16. (1893) S. 282.

Die dem λ -fachen Lineartheiler $\omega_1 - \omega$ der Fundamentalgleichung zugeordnete Integralgruppe lässt sich derart in Untergruppen zerlegen, dass jedem Elementarteiler von $(\omega_1 - \omega)^2$ bestimmten Grades eine Untergruppe derselben Stufenzahl entspricht.

Hiermit beschliessen wir die allgemeine Untersuchung der Integrale in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit oder allgemeiner in einem Kreisring.

Kapitel XIII.

Stellen der Unbestimmtheit, bei denen sich ein Teil der Integrale bestimmt verhält. Reduktibilität.

87. Aufstellung der zu behandelnden Aufgaben. Wir haben im vorigen Kapitel gesehen, dass in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit und in einem kreisringförmigen Gebiet die Integrale sich *im allgemeinen unbestimmt* verhalten, und wir schlossen aus Kap. X, dass jedenfalls nicht alle Integrale sich in einem solchen Kreisring, der nicht durch eine Kreisfläche zu ersetzen ist, bestimmt verhalten können. Dagegen ist keineswegs ausgeschlossen, dass ein Teil der Elemente eines in dem Kreisringe U mit dem Mittelpunkt $x=0$ gültigen Fundamentalsystems sich in Bezug auf $x=0$ bestimmt verhält.

Dass dies in der That möglich ist, wenn die Unbestimmtheitsstelle $x=0$ ausserwesentlich singulär ist, lehrte schon das 2. Beispiel in Artikel 23, wo wir das eine sich bestimmt verhaltende Integral e^x fanden. Dass aber auch bei einer wesentlich singulären Stelle oder überhaupt in einem Kreisring, in welchem sich sogar die Coefficienten der Differentialgleichung unbestimmt verhalten, einzelne sich bestimmt verhaltende Integrale existieren können, zeige das einfache Beispiel

$$(1) \quad y'' - c^x y' = 0.$$

$x=0$ ist wesentlich singuläre Stelle, da $e^{\frac{1}{x}}$ unendlich viele negative Potenzen enthält. U ist daher hier ein Kreisring um $x=0$, dessen innerer Kreis einen beliebig kleinen, dessen äusserer Kreis aber einen beliebig grossen Radius hat. Da der Coefficient von y in (1) Null ist, wird die Differentialgleichung durch eine Constante befriedigt, d. h. durch ein in Bezug auf x sich bestimmt verhaltendes Integral. Das zweite Integral muss sich daher unbestimmt verhalten. In der That folgt ja aus (1)

$$\frac{y''}{y'} = \frac{d \log y'}{dx} = e^{\frac{1}{x}}$$

$$y' = e^{\int_0^1 e^x dx}$$

$$y = \int_0^1 e^{\int_0^1 e^x dx} dx.$$

Wir fragen daher: *Unter welchen Umständen existieren auch in einem Kreisring U , der nicht durch einen Kreis zu ersetzen ist, sich bestimmt verhaltende Integrale?* — Wenn überhaupt solche Integrale existieren, so giebt es nach Art. 56 auch Integrale erster Stufe mit dieser Eigenschaft. Wir erhalten also durch Beantwortung der obigen Frage zugleich Aufklärung über das in Artikel 19 aufgetretene Problem, *unter welchen Umständen die bei einer ausserwesentlich singulären Stelle der Unbestimmtheit eventuell zu bildenden, sich bestimmt verhaltenden Reihen convergieren.*

Die Untersuchung der aufgeworfenen Frage wird uns auf den Begriff der *Reduktibilität linearer Differentialgleichungen* führen, der wiederum interessante Analogieen, aber auch Abweichungen im Vergleich mit der Theorie der algebraischen Gleichungen zeigt.

88. Differentialgleichung niedrigerer Ordnung für die sich bestimmt verhaltenden Integrale. Die Differentialgleichung

$$(2) \quad P(x, y) : p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

habe in $x = 0$ eine Stelle der Unbestimmtheit, die ausserwesentlich oder wesentlich singulär sein kann; die Umgebung derselben werde wieder mit U bezeichnet. Alles Folgende gilt auch dann, wenn U nur irgend einen Kreisring mit dem Mittelpunkt $x = 0$ bezeichnet, dessen Fläche keine singulären Punkte enthält und dessen innerer Begrenzungskreis nicht ganz weggelassen werden kann. Nur der kürzeren Ausdrucksweise wegen wollen wir fortan immer von dem zuerst genannten Fall sprechen.

Innerhalb U gelte nun das Fundamentalsystem von (2)

$$(3) \quad y_1 y_2 \dots y_r, y_{r+1} \dots y_n,$$

von dem die Integrale $y_1 \dots y_r$ sich bei $x = 0$ bestimmt verhalten, während alle von diesen linear unabhängigen Integrale, insbesondere also y_{r+1}, \dots, y_n , sich bei $x = 0$ unbestimmt verhalten. Bei einem Umlauf um $x = 0$ innerhalb U geht jedes der Integrale $y_1 y_2 \dots y_r$ nur in eine lineare homogene Function von diesen selbst über; denn nach der allgemeinen Umlaufsformel (Artikel 56, Formel (6)) eines logarithmenbehafteten Integrals, in dessen Reihen sämtliche Exponen-

ten der Potenzen von x sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden, ist

$$\bar{y}_\alpha \equiv \omega_\alpha \left[y_\alpha + (2\pi i) \frac{\partial y_\alpha}{\partial \log x} + \dots \right] \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots, \nu)$$

wieder ein sich bestimmt verhaltendes Integral und daher nach der Definition des Fundamentalsystems (3) durch $y_1 \dots y_\nu$ allein ausdrückbar. Bei der Einteilung des Fundamentalsystems (3) in Gruppen oder Untergruppen (s. Kap. XII) müssen deshalb $y_1 \dots y_\nu$ für sich in solche einzuteilen sein. Wir können daher voraussetzen, dass dies schon der Fall und dass bei dem Umlauf jedes der Integrale $y_1 y_2 \dots y_\nu$ sich nur mit einer von Null verschiedenen Constanten multipliciert und um eine lineare homogene Function der ihm vorangehenden dieser Integrale vermehrt. Bildet man dann die Differentialgleichung

$$(4) \quad \begin{vmatrix} y & y' & y'' & \dots & y^{(\nu)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \dots & y_1^{(\nu)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \dots & y_2^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y_\nu & y_\nu' & y_\nu'' & \dots & y_\nu^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0,$$

so folgt nach Kap. X, dass diese bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit besitzt; d. h.

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung bei einer Stelle der Unbestimmtheit $x = 0$ ν linear unabhängige, sich bestimmt verhaltende Integrale besitzt, so wird sie durch sämtliche Integrale einer Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung befriedigt, die bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat¹⁾.

89. Zerlegung eines Differentialausdrucks. Aus vorstehendem Satz können wir nun eine interessante Folgerung in Bezug auf den vorgelegten Differentialausdruck $P(x, y)$ in (2) selbst ziehen, die überhaupt immer dann Platz greift, wenn eine Differentialgleichung

$$P(x, y) \equiv p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

mit bei $x = 0$ eindeutigen Coefficienten durch sämtliche Integrale einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung

$$Q(x, y) \equiv q_0 y^{(r)} + q_1 y^{(r-1)} + \dots + q_r y = 0$$

mit ebenfalls bei $x = 0$ eindeutigen Coefficienten erfüllt wird.

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. (1875). S. 326. 7, wo dieser Satz für Differentialgleichungen, die in $x = 0$ eine ausserwesentlich singuläre Stelle haben, ausgesprochen ist.

Differenziert man nämlich Q $(n - \nu)$ -mal nach x und setzt

$$\frac{P_0}{q_0} = r_0(x),$$

so ist der Differentialausdruck

$$P - r_0 Q^{(n-\nu)}$$

nur noch von der $(n - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und seine Coefficienten sind $r_0(x)$ bei $x = 0$ eindeutig. Sie haben auch wie $r_0(x)$ in $x = 0$ dann eine wesentlich singuläre Stelle, wenn P oder Q in $x = 0$ solche besitzen. In gleicher Weise entfernt man aus diesem Differentialausdruck auch die $(n - 1)^{\text{te}}$ Ableitung von y durch Subtraktion mit einer leicht zu bestimmenden, bei $x = 0$ eindeutigen Function $r_1(x)$ multiplicierten $(n - \nu - 1)^{\text{ten}}$ Ableitung von Q , sodass der Differentialausdruck

$$P - r_0 Q^{(n-\nu)} - r_1 Q^{(n-\nu-1)}$$

nur noch $(n - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, bei $x = 0$ eindeutige Coefficienten und in $x = 0$ wie $r_1(x)$ nur dann eine wesentlich singuläre Stelle, wenn P oder Q daselbst eine solche haben. So fortfahrend geht man zu der Identität

$$(5) \quad P(x, y) - r_0 Q^{(n-\nu)} - r_1 Q^{(n-\nu-1)} - \dots - r_{n-\nu} Q = S(x, y)$$

wo $S(x, y)$ ein Differentialausdruck höchstens $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung bei $x = 0$ eindeutigen Coefficienten ist, die ebenso wie die bei $x = 0$ eindeutigen Functionen $r_0, r_1, \dots, r_{n-\nu}$ in $x = 0$ eine wesentlich singuläre Stelle nur dann haben, wenn dies von P oder Q gilt. Man kann noch die Bezeichnung

$$r_0 y^{(n-\nu)} + r_1 y^{(n-\nu-1)} + \dots + r_{n-\nu} y = R(x, y)$$

ein, so ist also nach (5)

$$(6) \quad P(x, y) = R(x, y) + S(x, y).$$

Setzt man nun in (6) für y der Reihe nach ν linear unabhängige Integrale von $Q = 0$ ein, so verschwindet jedesmal R und nach Voraussetzung auch P . Folglich muss auch der Differentialausdruck $S(x, y)$, dessen Ordnung $< \nu - 1$, für ν linear unabhängige Functionen verschwinden; dies erfordert aber nach einem Satz des Artikels, dass die Coefficienten von $S(x, y)$ sämtlich Null sind. Demnach ergibt (6)

$$P(x, y) = R(x, Q(x, y))$$

oder kurz geschrieben

$$(7) \quad P = R(Q).$$

Wir wollen sagen: der Differentialausdruck P ist bei $x = 0$ aus Differentialausdrücken Q und R zusammengesetzt oder in diese zer-

Die Reihenfolge der letzteren ist natürlich wesentlich; wir wollen, wie hier, immer den „inneren“ (Q) zuerst nennen.

Die Herleitung von (7) zeigt noch, dass, wenn P und Q in $x=0$ keine wesentlich singuläre Stelle haben, das Gleiche auch von R gilt. Somit haben wir den Satz¹⁾:

Wenn eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $P=0$ durch alle Integrale einer Differentialgleichung v^{ter} Ordnung ($v < n$) $Q=0$ erfüllt wird und die Coefficienten von P und Q bei $x=0$ eindeutig sind, so ist P bei $x=0$ in Q und einen Differentialausdruck $(n-v)^{\text{ter}}$ Ordnung R mit ebenfalls bei $x=0$ eindeutigen Coefficienten zerlegbar. Ist $x=0$ für P und Q ausserwesentlich singuläre Stelle, so auch für R .

Umgekehrt ist es evident, dass, wenn der Differentialausdruck $P(x, y)$ wie in (7) zerlegt werden kann, alle Integrale von $Q=0$ der Gleichung $P=0$ genügen, weil $R(x, y)=0$ als homogene lineare Differentialgleichung das Integral Null besitzt. Die Integrale $y_1 y_2 \dots y_v$ von $Q=0$ sind aber erst v linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $P=0$, und wir gelangen folgendermassen zu $n-v$ weiteren. Es sei

$$\eta_{v+1} \eta_{v+2} \dots \eta_n$$

ein Fundamentalsystem von $R(x, y)=0$. Dann sind die Integrale der nicht homogenen Gleichungen

$$(8) \quad Q(x, y) = \eta_{v+\alpha} \quad (\alpha=1, 2, \dots, n-v),$$

je eines von jeder, die wir mit $y_{v+1}, y_{v+2}, \dots, y_n$ bezeichnen wollen, $n-v$ Integrale von $P=0$. Die Integrale

$$y_1 y_2 \dots y_v y_{v+1} \dots y_n$$

sind aber linear unabhängig. Bestände nämlich eine Relation

$$(9) \quad C_1 y_1 + \dots + C_v y_v + C_{v+1} y_{v+1} + \dots + C_n y_n \equiv 0,$$

so dürften in dieser nicht alle $C_{v+1} \dots C_n$ Null sein, weil die $y_1 \dots y_v$ unter sich linear unabhängig sind, und es dürften nicht alle $C_1 \dots C_v$ Null sein, weil aus einer linearen Abhängigkeit der $y_{v+1} \dots y_n$ unter sich eine solche der η nach (8) folgen würde. Es müsste also in (9) mindestens eines der $C_1 \dots C_v$ und eines der $C_{v+1} \dots C_n \neq 0$ sein. Wäre also etwa $C_1 \neq 0$, so wäre nach (8) und (9)

$$y_1 \equiv -\frac{1}{C_1} (C_2 y_2 + \dots + C_v y_v) - \frac{1}{C_1} (C_{v+1} y_{v+1} + \dots + C_n y_n),$$

worin die zweite Klammer nicht identisch Null, ein Integral der nicht homogenen Gleichung

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 76. (1873). S. 257.

$$Q(x, y) = -\frac{C_{v+1}}{C_1} \eta_{v+1} - \dots - \frac{C_n}{C_1} \eta_n,$$

während doch y_1 ein Integral der reducierten Gleichung $Q = 0$ ist. Eine Relation (9) ist daher ausgeschlossen, und wir haben das Ergebnis¹⁾:

Wenn ein Differentialausdruck n^{ter} Ordnung P sich in zwei andere Q und R bzw. v^{ter} und $(n - v)^{\text{ter}}$ Ordnung zerlegen lässt,

$$P \equiv R(Q),$$

so erhält man ein Fundamentalsystem der Gleichung $P = 0$ durch ein solches von

$$Q = 0$$

$y_1 y_2 \dots y_v$ und durch je ein Integral $y_{v+\alpha}$ der $n - v$ nicht homogenen Gleichungen

$$Q = \eta_{v+\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n - v),$$

wo $\eta_{v+1} \dots \eta_n$ ein Fundamentalsystem von $R = 0$ ist.

90. Zerlegbarkeit eines Differentialausdrucks mit bei $x=0$ zum Teil sich bestimmt verhaltenden Integralen. Die allgemeinen Ergebnisse des vorigen Artikels wenden wir nunmehr* auf die Differentialgleichung (2) bei den im Art. 88 gemachten Voraussetzungen an.

Zu dem Ende bezeichnen wir die linke Seite der Gleichung (4), wenn sie etwa in die Normalform bei $x=0$ gesetzt ist, mit

$$A(x, y),$$

und finden demnach einen Differentialausdruck $(n - v)^{\text{ter}}$ Ordnung $B(x, y)$, sodass Gl. (2) die Form erhält

$$(2^a) \quad P(x, y) \equiv B(x, A(x, y)) = 0$$

oder $P \equiv B(A) = 0.$

Wie wir wissen, liefert $A=0$ sämtliche sich bei $x=0$ bestimmt verhaltende Integrale von $P=0$ (s. Art. 88). Die übrigen Elemente eines Fundamentalsystems von (2^a) in der Umgebung von $x=0$ müssen sich daher durchweg unbestimmt verhalten. Daraus folgt, dass auch alle Integrale von

$$* \quad B = 0$$

sich bei $x=0$ unbestimmt verhalten. Ist nämlich η ein Integral von $B=0$, so ist nach vorigem Artikel jedes Integral der nicht homogenen Gleichung

$$A = \eta$$

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 76. S. 259.

ein von den Integralen $y_1 y_2 \dots y_\nu$ von $A = 0$ linear unabhängiges Integral von $P = 0$. Wäre nun η ein sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltendes Integral, so könnten wir annehmen, dass es logarithmenfrei ist; denn wenn die Differentialgleichung $B = 0$ überhaupt sich bestimmt verhaltende Integrale besitzt, so besitzt sie jedenfalls auch ein solches von der ersten Stufe. Dann würden sich aber auch alle Integrale der nicht homogenen Gleichung $A = \eta$ bestimmt verhalten, da die reducierte Gleichung $A = 0$ bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit und die homogene Gleichung $(\nu + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, der alle Integrale von $A = \eta$ genügen, bei $x = 0$ wieder dieselbe Eigenschaft hat (s. Art. 58). Wir würden demnach ein von $y_1 y_2 \dots y_\nu$ unabhängiges, sich bestimmt verhaltendes Integral von $P = 0$ finden, was ausgeschlossen ist. Demnach müssen alle Integrale von $B = 0$ sich unbestimmt verhalten¹⁾.

Wir fassen das Resultat der ganzen Untersuchung in dem Satz zusammen:

Wenn die Differentialgleichung

$$P(x, y) = 0$$

bei der (wesentlich oder ausserwesentlich singulären) Stelle der Unbestimmtheit $x = 0$ genau ν linear unabhängige, sich bestimmt verhaltende Integrale besitzt, so ist $P(x, y)$ zusammengesetzt aus einem Differentialausdruck ν^{ter} Ordnung $A(x, y)$, der bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat, und aus einem Differentialausdruck $(n - \nu)^{\text{ter}}$ Ordnung $B(x, y)$, der bei $x = 0$ eine Stelle der Unbestimmtheit hat

$$P \equiv B(A).$$

$A = 0$ hat also nur sich bestimmt verhaltende, $B = 0$ hat nur sich unbestimmt verhaltende Integrale.

91. Specialisierung für ausserwesentlich singuläre Stellen. Zerlegbarkeit der Recursionsformel. Nehmen wir jetzt an, $x = 0$ sei keine wesentlich singuläre Stelle, so lässt sich aus dem vorstehenden Resultat noch ein interessanter Schluss in Bezug auf die Recursionsformel und die determinierende Gleichung von $P = 0$ ziehen. Wir knüpfen zu dem Ende zunächst wieder an die allgemeinere Untersuchung in Artikel 89 an und setzen voraus, die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $P = 0$, die in $x = 0$ keine wesentlich singuläre Stelle hat, werde durch sämtliche Integrale der Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung $Q = 0$ befriedigt, welche in $x = 0$ ebenfalls keine wesentlich singuläre

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. S. 326. Satz 8.

Stelle hat. Beide Differentialausdrücke denken wir uns in die Normalform bei $x = 0$ gesetzt

$$(10) \quad P(x, y) = x^n \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{P}_n y = 0$$

$$(11) \quad Q(x, y) = x^r \mathfrak{D}_0 y^{(r)} + x^{r-1} \mathfrak{D}_1 y^{(r-1)} + \dots + \mathfrak{D}_r y = 0,$$

wo die \mathfrak{P} und \mathfrak{D} gewöhnliche Potenzreihen sind und weder die \mathfrak{P} noch die \mathfrak{D} für $x = 0$ sämtlich verschwinden.

Nach Artikel 89 giebt es dann einen Differentialausdruck $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(12) \quad R(x, y) = r_0 y^{(n-r)} + r_1 y^{(n-r-1)} + \dots + r_{n-r} y,$$

der bei $x = 0$ ebenfalls keine wesentlich singuläre Stelle hat und derart gestaltet ist, dass

$$(13) \quad P(x, y) = R(x, Q(x, y)).$$

Seien nun

$$(10^a) \quad I'_{k\alpha} = a_{kk} c_k + a_{kk-1} c_{k-1} + \dots + a_{k\alpha} c_\alpha = 0$$

$$(11^a) \quad G_{k\alpha} = g_{kk} c_k + g_{kk-1} c_{k-1} + \dots + g_{k\alpha} c_\alpha = 0$$

$$(12^a) \quad H_{k\alpha} = h_{kk} c_k + h_{kk-1} c_{k-1} + \dots + h_{k\alpha} c_\alpha = 0$$

die Recursionsformeln von bezw. (10), (11), (12), wenn man in jedem dieser Differentialausdrücke substituiert

$$y = \eta = \sum_{(k)} c_k x^k \quad (k = \alpha, \alpha + 1, \dots).$$

Ferner sei $\bar{R}(x, y)$ die Normalform, in welche man auch den Differentialausdruck $R(x, y)$ bei $x = 0$ durch Multiplication mit einer geeigneten Potenz von x setzen kann, sodass

$$(14) \quad \bar{R}(x, y) = x^\lambda R(x, y),$$

wo λ eine positive oder negative ganze Zahl oder Null ist. Dann ist nach Art. 6 Formel (5^a)

$$\left. \begin{aligned} (10^b) \quad & P(x, \eta) = \sum_{(k)} I'_{k\alpha} x^k \\ (11^b) \quad & Q(x, \eta) = \sum_{(k)} G_{k\alpha} x^k \\ (12^b) \quad & \bar{R}(x, \eta) = \sum_{(k)} H_{k\alpha} x^{k-\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (k = \alpha, \alpha + 1, \dots).$$

Setzt man daher in (13) $y = \eta$, so ergibt sich die linke Seite dieser Identität unmittelbar aus (10^b), die rechte Seite aber aus (12^b),

alle Integrale der Differentialgleichung v^{ter} Ordnung $Q = 0$ erfüllt, welche bei $x = 0$ ebenfalls keine wesentlich singuläre Stelle und die Normalform hat, so ist

$$P = R(Q),$$

wo R ein Differentialausdruck $(n - v)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, welcher wiederum bei $x = 0$ keine wesentlich singuläre Stelle und die Normalform hat. Die Recursionsformel von $P = 0$ ist aus denen von $Q = 0$ und $R = 0$ zusammengesetzt

$$P_{k\alpha} = H_{k\alpha}(G_{k\alpha}),$$

und die determinierende Function von P ist das Produkt derjenigen von Q und R

$$a_{kk} = (g_{kk} h_{kk} \cdot 1)$$

Wenden wir diesen Satz auf unser Ausgangsproblem an, wobei $P = 0$ in $x = 0$ eine Stelle der Unbestimmtheit haben, aber trotzdem ein Teil der Integrale bei $x = 0$ bestimmtes Verhalten zeigen sollte, so ergibt sich unmittelbar daraus, dass dann Q (oder A in Artikel 90) in $x = 0$ eine Bestimmtheitsstelle haben musste, der Satz²⁾:

Die Anzahl der linear unabhängigen, sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltenden Integrale der Differentialgleichung $P(x, y) = 0$, die in $x = 0$ keine wesentlich singuläre Stelle hat, ist höchstens gleich dem Grade der determinierenden Function von $P(x, y)$ und genau gleich demselben, wenn bei der Zerlegung

$$P = B(A),$$

wo A in $x = 0$ eine Bestimmtheitsstelle hat, die determinierende Function von B eine Constante ist.

Den ersten Teil dieses Satzes hätten wir auch so erschliessen können: Wenn die Differentialgleichung $P = 0$ v linear unabhängige, sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltende Integrale besitzt, darf man annehmen (s. Art. 71), dass nicht zwei von ihnen zu demselben an gleicher Stelle stehenden Exponenten gehören. Dann muss aber die determinierende Gleichung nach Artikel 60 mindestens v^{ten} Grades sein.

92. Zerlegung eines Differentialausdruckes in Differentialausdrücke erster Ordnung. Obwohl das für das gegenwärtige Kapitel aufgestellte Problem bereits seiner Lösung zugeführt ist, wollen wir die *Zerlegung von Differentialausdrücken*, welche bei jener Untersuchung als Mittel diente, noch etwas weiter verfolgen.

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. S. 321.

2) Ebenda S. 330. 2.

Die Differentialgleichung

$$(20) \quad P(x, y) = 0$$

habe in der Umgebung U von $x=0$ *eindeutige Coefficienten*, gleich viel welcher Art die Stelle $x=0$ im übrigen sei. Nach Kapitel XII giebt es dann jedenfalls ein innerhalb U gültiges Fundamentalsystem

$$y_1 y_2 \dots y_n,$$

das in Untergruppen eingeteilt ist, sodass bei einem Umlauf um $x=0$ jedes Integral sich mit einer von Null verschiedenen Constanten multipliciert und höchstens noch um eine lineare homogene Function der vorangehenden Integrale vermehrt (wenn wir uns nämlich in der Folge von y_1 zu y_n die Elemente jeder Untergruppe nach *wachsender* Stufenzahl geordnet denken). Diese Eigenschaft bleibt also bestehen, wenn wir am Ende der Reihe $y_1 y_2 \dots y_n$ eine beliebige Anzahl von Integralen streichen. Nach einem Satz des Artikel 72 genügt daher jedes der Functionssysteme

$$y_1 y_2 \dots y_{\lambda-1} y_{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

einer linearen homogenen Differentialgleichung bezw. λ^{ter} Ordnung, welche bei $x=0$ *eindeutige Coefficienten* hat.

Bezeichnen wir die Differentialgleichung für die Integrale

$$y_1 y_2 \dots y_{n-1}$$

mit

$$P' = 0,$$

so ist nach Art. 89 P zerlegbar in P' und einen Differentialausdruck erster Ordnung P_n mit ebenfalls bei $x=0$ *eindeutigen Coefficienten*

$$P \equiv P_n(P')$$

oder kurz geschrieben

$$P \equiv P_n P'.$$

P' ist aber wieder zerlegbar in einen Differentialausdruck $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung P'' , wenn nämlich $P''=0$ die Gleichung für $y_1 y_2 \dots y_{n-2}$ ist, und einen Differentialausdruck erster Ordnung P_{n-1}

$$P' \equiv P_{n-1} P'',$$

sodass

$$P \equiv P_n P_{n-1} P''.$$

So fortfahrend gelangt man zu der Zerlegung von P in n Differentialausdrücke erster Ordnung $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$, die sämtlich bei $x=0$ *eindeutige Coefficienten* haben,

$$(21) \quad P \equiv P_n P_{n-1} \dots P_2 P_1.$$

$P_1 = 0$ liefert also das Integral y_1 , $P_2 P_1 = 0$ wird ausser durch y_1 noch durch y_2 befriedigt u. s. w.

Wir haben also den Satz:

Jeder Differentialausdruck n^{ter} Ordnung

$$P(x, y)$$

mit in der Umgebung von $x=0$ eindeutigen Coefficienten lässt sich in n Differentialausdrücke erster Ordnung mit ebenfalls bei $x=0$ eindeutigen Coefficienten

$$P = P_n P_{n-1} \dots P_2 P_1$$

zerlegen.

Nehmen wir insbesondere an, dass P bei $x=0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat, so gilt nach Kap. X das Gleiche auch von jedem der Differentialausdrücke

$$P_1, P_2 P_1, \dots, P_{n-1} \dots P_2 P_1.$$

Folglich kann zunächst P_2 in $x=0$ keine wesentlich singuläre Stelle haben, da P_1 und $P_2 P_1$ in $x=0$ eine ausserwesentlich singuläre Stelle haben (Art. 89). Ebenso erschliesst man, dass P_3, \dots, P_n in $x=0$ nur eine ausserwesentlich singuläre Stelle haben. Da nun aber der Grad der determinierenden Function von $P_2 P_1 = 2$, der von $P_1 = 1$ und nach Artikel 91 der Grad der determinierenden Function von $P_2 P_1$ die Summe der Grade der determinierenden Functionen von P_1 und P_2 ist, so folgt, dass dieser Grad auch bei P_2 den Wert 1 hat, d. h. dass P_2 ebenfalls in $x=0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat. Das Gleiche ergibt sich für P_3, \dots, P_n , und wir haben das Resultat¹⁾:

Hat der Differentialausdruck n^{ter} Ordnung $P(x, y)$ in $x=0$ eine Stelle der Bestimmtheit, so gilt dasselbe von den Differentialausdrücken erster Ordnung

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n,$$

aus denen man P zusammensetzen kann.

Die Zerlegung eines Differentialausdrucks in Differentialausdrücke erster Ordnung, — die man auch *Zerlegung in symbolische Primfactoren* genannt hat²⁾ — erinnert nun wieder auf das Lebhafteste an die Zerlegung einer ganzen rationalen Function in Linearfactoren, nur dass diese symbolischen Factoren im allgemeinen nicht untereinander vertauschbar sind. Wie aber die Zerlegung einer ganzen Function in Linearfactoren nur möglich ist, wenn man den Coefficienten der letzteren den weitesten Spielraum lässt, — es sind ja die Wurzeln der algebraischen Gleichung — also wenn man nach der Kronecker'schen Ausdrucksweise die Wurzeln der Gleichung selbst dem Rationalitätsbereich adjungiert, so ist die Zerlegbarkeit auch hier (nach dem all-

1) Vgl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. S. 325. 5.

2) Floquet, Annales de l'école normale, 2^{me} série, t. 8. (1879). Suppl. S. 79.

gemeinen Satz dieses Artikels) nur so möglich, dass von den Coefficienten der Primfactoren lediglich die *Eindeutigkeit* ausgesagt werden kann. Die *Eindeutigkeit* war aber auch das Einzige, was dabei von den Coefficienten des Differentialausdrucks $P(x, y)$ selbst vorausgesetzt wurde. Bleibt man also hierbei stehen, so ist es unmöglich, für lineare Differentialgleichungen eine der *Irreduktibilität* und *Reduktibilität* algebraischer Gleichungen analoge Eigenschaft zu definieren. Wollen wir zu einem solchen Begriff gelangen, so müssen wir daher mindestens die erste mögliche Einschränkung treffen, nämlich die, dass $x = 0$ keine *wesentlich singuläre Stelle* sein soll.

93. Reduktibilität linearer Differentialgleichungen. Ist

$$(22) \quad P(x, y) = 0$$

eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, die in $x=0$ keine wesentlich singuläre Stelle hat, so nennen wir dieselbe „bei der Stelle $x=0$ reductibel“, wenn sie mit einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung von derselben Beschaffenheit

$$(23) \quad Q(x, y) = 0$$

ein Integral gemein hat, andernfalls „irreductibel bei $x = 0$ “¹⁾.

Angenommen $P = 0$ sei reductibel, und die Differentialgleichung niedrigerer (v^{ter}) Ordnung $Q = 0$, mit der sie ein Integral η gemein hat, sei irreductibel. Nach Artikel 89 können wir P in die Form setzen

$$(24) \quad P = R(Q) + S,$$

wo R und S bei $x = 0$ wieder keine wesentlich singuläre Stelle haben, R von der Ordnung $n - v$ und S höchstens von der Ordnung $v - 1$ ist. Setzt man in (24) $y = \eta$, so verschwinden Q und P , folglich muss auch

$$S(x, \eta) = 0$$

sein. Da aber $Q = 0$ irreductibel sein sollte, also mit der Differentialgleichung niedrigerer Ordnung $S = 0$, die bei $x = 0$ keine wesentlich singuläre Stelle hat, kein Integral gemein haben kann, muss für jeden Wert von y

$$S(x, y) = 0$$

sein, d. h. wir haben

$$P = R(Q)$$

oder den Satz²⁾:

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. S. 322. Zu unterscheiden hiervon ist die auch von Frobenius (ebenda, Bd. 76. S. 237) gegebene Definition. S. auch Koenigsberger (ebenda Bd. 96. (1884). S. 123).

2) Dieser und der folgende Satz sind nebst ihrer Ableitung nahezu wörtlich von Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80, S. 257 u. 258, entnommen.

Wenn eine lineare Differentialgleichung mit einer irreduktiblen Differentialgleichung ein Integral gemein hat, so wird sie durch sämtliche Integrale derselben erfüllt.

Sind

$$P = 0 \quad \text{und} \quad P_1 = 0$$

zwei Differentialgleichungen bzw. n^{ter} und n_1^{ter} Ordnung, die beide keine wesentlich singuläre Stelle haben, so kann man die Funktionen P und P_1 und bzw. welche Integrale sie gemein haben, durch ein Verfahren entscheiden, welches demjenigen zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Teilers zweier ganzen Zahlen oder zweier ganzen Funktionen völlig analog ist. Es sei $n \geq n_1$; dann können wir die Kettenidentitäten bilden

$$(25) \quad \begin{cases} P & \equiv R_1(P_1) + P_2 \\ P_1 & \equiv R_2(P_2) + P_3 \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_{i-1} & \equiv R_i(P_i) + P_{i+1}, \end{cases}$$

wo alle P und R bei $x = 0$ immer wieder dieselbe Beschaffenheit haben, und, wenn n_k die Ordnung von P_k ist, die Ungleichungen

$$n \geq n_1 > n_2 > \dots > n_i > n_{i+1}$$

bestehen, die zur Folge haben, dass man endlich zu einem verschwindenden n_k gelangt, nämlich spätestens für $k = n_1 + 1$. Es ist das erste verschwindende n_k , sodass P_{i+1} ein Differentialausdruck der Ordnung ist, d. h.

$$(26) \quad P_{i+1} \equiv \varphi(x) y.$$

Nach (25) muss nun jedes Integral, das $P = 0$ und $P_1 = 0$ gemein ist, auch $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ u. s. w., endlich auch $P_i = 0$, $P_{i+1} = 0$ erfüllen, und umgekehrt ist jedes gemeinsame Integral dieser beiden ein solches von $P = 0$ und $P_1 = 0$. Ist daher $\varphi(x)$ von Null verschieden, so haben $P = 0$ und $P_1 = 0$ das triviale Integral $y \equiv 0$ gemein. Ist aber $\varphi(x) \equiv 0$, so sind die Integrale von

$$P_i = 0$$

auch Integrale von $P = 0$ und $P_1 = 0$. Hieraus folgt:

Wenn eine lineare Differentialgleichung reduktibel ist, so ist jede Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren sämtliche Integrale der vorgelegten genügen.

Ist nun die Gleichung $Q = 0$, deren sämtliche Integrale die Differentialgleichung erfüllen, selbst wieder reduktibel, so giebt es eine Differentialgleichung noch niedrigerer Ordnung, deren sämtliche Integrale $Q = 0$ erfüllen.

$P = 0$ erfüllen; u. s. w., bis man zu einer irreduktiblen Gleichung $T_1 = 0$ gelangt, deren sämtliche Integrale $P = 0$ genügen, sodass

$$P \equiv S(T_1).$$

Ebenso kann man aber auch die Gleichung $S = 0$ und folglich den Differentialausdruck S behandeln; u. s. w. So kann man schliesslich P in die Form bringen

$$P \equiv T_\lambda T_{\lambda-1} \dots T_2 T_1,$$

wo $T_\lambda, T_{\lambda-1}, \dots, T_2, T_1$ lauter irreduktible Differentialausdrücke sind, deren Ordnungszahlen die Summe n haben. Also:

Ein reduktibler Differentialausdruck n^{ter} Ordnung $P(x, y)$, der bei $x = 0$ keine wesentlich singuläre Stelle hat, kann in eine Anzahl irreduktibler symbolischer Faktoren zerlegt werden, sodass die Summe von deren Ordnungszahlen gleich der Ordnung n von P ist.

Einen Specialfall dieses Satzes haben wir bereits in dem zweiten Satz des Artikels 92 kennen gelernt.

94. Nachweis der Existenz irreduktibler Differentialgleichungen¹⁾.

Wir wollen uns noch davon überzeugen, dass es in der That *irreduktible lineare Differentialgleichungen jeder Ordnung* überhaupt giebt, da dies ja aus dem Vorhergehenden noch nicht zu ersehen ist. Wir brauchen zu dem Ende nur nachzuweisen, dass es Differentialausdrücke n^{ter} Ordnung giebt, die nicht in zwei andere zerlegt werden können.

Die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

$$(27) \quad P(x, y) = x^n \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

welche bei $x = 0$ die Normalform habe, sei so beschaffen, dass in der zugehörigen Recursionsformel

$$(28) \quad P'_{kk} = a_{kk} c_k + a_{k,k-1} c_{k-1} + \dots + a_{k,\alpha} c_\alpha = 0$$

a_{kk} von k unabhängig ist, $a_{k,k-1}$ aber den höchsten möglichen, nämlich den n^{ten} Grad in k hat. Diese Bedingungen sind leicht zu erfüllen. Damit a_{kk} vom 0^{ten} Grad in k sei, ist notwendig und hinreichend (s. Art. 8), dass

$$(29) \quad \mathfrak{P}_0(0) = 0, \dots, \mathfrak{P}_{n-1}(0) = 0, \mathfrak{P}_n(0) \neq 0.$$

Nach Artikel 6 (7) ist

$$a_{k,k-1} = \sum_{v=0}^{v=n} p_{v1} (k-1)(k-2) \dots (k-n+v),$$

wo

$$p_{v1} \equiv \mathfrak{P}'_v(0).$$

1) Vergl. Frobenius, Crelles Journ. Bd. 80. S. 332. 333.

Damit also a_{kk-1} vom n^{ten} Grad in k sei, ist notwendig und
 chend, dass

$$(30) \quad \mathfrak{P}'_0(0) \neq 0.$$

Wir sehen also zunächst:

*Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass
 zu $x=0$ gehörigen Recursionsformel $P_{k,n}=0$ von $P(x,y)$ $a_{k,n}$ $a_{k,k-1}$
 vom n^{ten} Grad sei, bestehen darin, dass die Differential-
 die Gestalt hat*

$$(27^n) \quad P(x,y) = x^{n+1} \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^n \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \dots + x^2 \mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y + \mathfrak{P}_{n+1},$$

wo $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von x sind und \mathfrak{P}_n
 für $x=0$ nicht verschwinden.

Von Differentialgleichungen, in deren zu $x=0$ gehöriger
 sionsformel (28) a_{kk} vom 0^{ten} , $a_{k,k-1}$ vom n^{ten} Grad ist, ist also
 zu zeigen, dass sie bei $x=0$ irreduktibel sind. Wäre näm-
 Differentialausdruck $P(x,y)$ einer solchen Gleichung zerlegbar
 Differentialausdrücke niedrigerer, ν^{ter} und $(n-\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung be-
 den Recursionsformeln

$$G_{k,\nu} = 0 \quad \text{und} \quad H_{k,n-\nu} = 0,$$

so wäre, wenn alle drei Differentialausdrücke die Normalform
 nach der ersten der Gleichungen (19)

$$a_{kk} = h_{kk} g_{kk},$$

also h_{kk} und g_{kk} wie a_{kk} vom 0^{ten} Grad in k . In der zwei-
 Gleichungen (19)

$$a_{k,k-1} = h_{k,k-1} g_{k,k-1} + h_{k,k-1} g_{k,k-1,k-1}$$

wäre aber rechts $g_{k,k-1}$ höchstens ν^{ten} , $h_{k,k-1}$ höchstens $(n-\nu)^{\text{ten}}$
 also die rechte Seite jedenfalls von niedrigerem als dem n^{ten}
 während links $a_{k,k-1}$ n^{ten} Grades ist. Die Gleichung $P=0$ ist
 irreduktibel bei $x=0$, wenn sie die Gestalt (27ⁿ) hat, und wir
 den Satz:

Die Gleichung

$$x^{n+1} \mathfrak{P}_0 y^{(n)} + x^n \mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \dots + x^2 \mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y + \mathfrak{P}_{n+1} = 0$$

wo $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von x sind und

$$\mathfrak{P}_0(0) \neq 0, \quad \mathfrak{P}_n(0) \neq 0,$$

ist bei $x=0$ irreduktibel¹⁾.

95. Beispiele. Wir wollen noch einige Beispiele für die
 sich bestimmt verhaltender Integrale bei einer Stelle der Unbe-

1) Vergl. Floquet, Annales de l'école norm., 2^{me} série, t. 8. (1879). Sup

heit und für die Reduktibilität linearer Differentialgleichungen folgen lassen.

Schon in Artikel 23 zeigte das zweite Beispiel

$$(31) \quad P(x, y) \equiv x^3 y'' + xy' - x(1 + x^2)y = 0$$

die Existenz eines sich bei der Stelle der Unbestimmtheit $x = 0$ bestimmt verhaltenden Integrals

$$y = e^x.$$

Wir wissen jetzt, dass Gleichung (31) infolge dessen reductibel sein muss. In der That genügt $y = e^x$ der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' - y = 0$$

oder in Normalform geschrieben

$$(32) \quad Q(x, y) \equiv xy' - xy = 0,$$

und man findet leicht, dass

$$P(x, y) \equiv R(x, Q(x, y)),$$

wenn

$$R(x, y) \equiv x^2 y' + (1 - x + x^2)y.$$

Die Recursionsformeln von $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ lauten bezw. (s. Art. 23)

$$I'_{k\alpha} \equiv kc_k - c_{k-1} + (k-2)[(k-1)c_{k-1} - c_{k-2}] + (k-2)c_{k-2} - c_{k-3} = 0$$

$$G_{k\alpha} \equiv kc_k - c_{k-1} = 0$$

$$H_{k\alpha} \equiv c_k + (k-2)c_{k-1} + c_{k-2} = 0,$$

sodass

$$I'_{k\alpha} \equiv H_{k\alpha}(G_{k\alpha})$$

und

$$a_{kk} \equiv h_{kk} g_{kk}$$

oder

$$k \equiv 1 \cdot k,$$

da hier $h_{kk} = 1$ ist. Dies ist mit den allgemeinen Formeln in Art. 91 in Uebereinstimmung.

2. Beispiel. Das dritte Beispiel in Artikel 23

$$(33) \quad P(x, y) \equiv x^3 y'' + x(2x - 1)y' + y = 0$$

hat bei $x = 0$, obwohl die determinierende Function ersten Grades ist, kein sich bestimmt verhaltendes Integral, wie dort (S. 44) nachgewiesen wurde. Die Zerlegbarkeit der zugehörigen Recursionsformel

$$I'_{k\alpha} \equiv (k-1)[-c_k + kc_{k-1}] \equiv (k-1)G_{k\alpha} = 0,$$

wo

$$G_{k\alpha} \equiv -c_k + kc_{k-1},$$

lässt aber vermuten, dass die Gleichung reductibel ist. In der That ist

$$Q(x, y) = x^2 y' + (x - 1)y = 0$$

eine Differentialgleichung mit der Recursionsformel $G_{k+1} = 0$ und

$$P(x, y) = R(x, Q(x, y)),$$

wenn

$$R(x, y) = xy' - y,$$

wo die Recursionsformel von $R = 0$

$$H_{k+1} = (k+1)c_k = 0$$

lautet, sodass

$$P_{k+1} = H_{k+1}(G_{k+1}).$$

Die Gleichung (33) ist also wirklich reductibel. Während aber bei der Zerlegung von (31), welche ein sich bestimmt verhaltendes Integral besitzt, der *innere* Differentialausdruck Q die Bestimmtheitsgestalt besitzt und der *äussere* R die der Unbestimmtheit, ist es bei (33) umgekehrt.

Da $R=0$ das Integral $y=x$ hat, sind die Integrale von Q die von

$$Q = x^2 y' + (x - 1)y = 0$$

und

$$Q = x = x^2 y' + (x - 1)y = x = 0.$$

$Q = 0$ liefert das Integral

$$y_1 = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Das Integral von $Q = x = 0$ setzt man in der Gestalt an

$$y_2 = f(x)y_1$$

und findet dann durch Substitution in die Gleichung $Q = x = 0$

$$f(x) = \int e^{\frac{1}{x}} dx$$

sein muss. Demnach sind die Integrale von $P = 0$

$$y_1 = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}, \quad y_2 = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \int e^{\frac{1}{x}} dx$$

beide unbestimmt bei $x=0$, wie es die Theorie erfordert.

3. *Beispiel.* Endlich noch ein Beispiel zur Illustration der Beziehung zwischen den determinierenden Functionen zweier Differentialausdrücke und des aus jenen zusammengesetzten Differentialausdrucks.

Bildet man aus

$$Q = x^2 y'' + x^2 y' + xy$$

$$R = xy' + y,$$

1) Es wäre eine wünschenswerte Ergänzung dieser Theorie, wenn sie zeigen liesse, dass eine Differentialgleichung, deren determinierende Function keine Constante ist, stets reductibel ist. Dieser Beweis ist, soviel der Verfasser weiss, bisher noch nicht erbracht worden.

elche die Normalform haben und deren determinierende Functionen
ezzw.

$$g_{kk} \equiv k(k-1)$$

$$h_{kk} \equiv k+1$$

nd, den Differentialausdruck

$$P \equiv R(Q) \equiv x^3 y''' + x^2 (3+x) y'' + 4x^2 y' + 2xy$$

it der determinierenden Function

$$a_{kk} \equiv k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) \equiv (k+1)k(k-1),$$

hat auch P die Normalform, und es ist in der That

$$a_{kk} \equiv h_{kk} g_{kk}.$$

Kapitel XIV.

Die Integrale in der Umgebung unendlich grosser Werte der unabhängigen Variablen.

96. Transformation mittelst reziproker Radion. Wir haben bisher für die Umgebung aller endlichen Werte von x , zu denen in Bezug auf die Differentialgleichung eine Umgebung überhaupt gehört, die analytische Gestalt und das Verhalten der Integrale ermittelt, die unendlich grossen Werte von x aber noch gar nicht in den Kreis unserer Betrachtung gezogen. Die vollständige Untersuchung der Integralfunction erfordert daher noch ein Eingehen auf die letzteren.

Es sei

$$(1) \quad P(x, y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

die vorgelegte Differentialgleichung. Wir substituieren nun — wie häufig in der Analysis, wenn es sich um die Untersuchung einer Function für unendlich grosse Werte ihrer Variablen handelt — in (1)

$$(2) \quad x = \frac{1}{z}$$

und führen dadurch für x die neue unabhängige Veränderliche z ein, oder *wir bilden*, wie man auch sagt, *die x -Ebene mittelst reziproker Radion auf eine z -Ebene ab*. Jedem endlichen von Null verschiedenen Wert von x entspricht ein bestimmter endlicher von Null verschiedener Wert von z und umgekehrt; jedem unendlich grossen Wert von x aber der eine Wert $z = 0$ und umgekehrt jedem unendlich grossen Wert von z der eine Wert $x = 0$. Ferner entspricht jedem Kreis mit dem Mittelpunkt $x = 0$ ein solcher mit dem Mittelpunkt $z = 0$ und reziprokem Radius und umgekehrt. Aber dem Innern eines Kreises in der x -Ebene entspricht der ausserhalb des entsprechenden Kreises liegende Teil der z -Ebene und umgekehrt.

Man kann sich von dieser Zuordnung zwischen den Punkten der x -Ebene und denen der z -Ebene mittelst reziproker Radion auf folgende Art geometrisch ein sehr anschauliches Bild machen (s. Fig. 3). Die x -Ebene und z -Ebene mögen in ihren Nullpunkten eine Kugel

mit dem Durchmesser 1 in zwei diametralen Punkten berühren und dabei eine solche Lage haben, dass die reellen Axen beider Ebenen gleichlaufend, die imaginären Axen aber ungleichlaufend parallel sind.

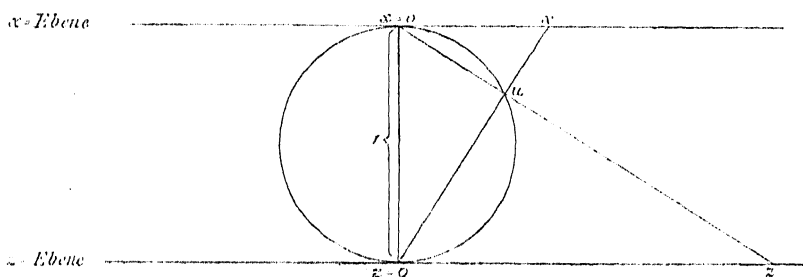


Fig. 3.

Um zu irgend einem Punkt x nun den zugeordneten $z = \frac{1}{x}$ zu finden, braucht man nur x mit $z = 0$ zu verbinden, wodurch ein bestimmter Punkt u auf der Kugel ausgestochen wird. Verbindet man dann $x = 0$ mit u , so trifft diese Gerade die z -Ebene in dem Punkt $z = \frac{1}{x}$. Der Beweis ist leicht zu führen.

Aus dem Grunde, weil bei dieser Abbildung *jedem* unendlich grossen Wert von x der *eine* bestimmte Wert $z = 0$ zugeordnet ist, spricht man gelegentlich auch schon bei der x -Ebene selbst von *dem unendlich fernen Punkt der x -Ebene* und belegt diesen mit dem Zeichen $x = \infty$.

97. Die transformierte Differentialgleichung. Um nun die Transformation der Differentialgleichung (1) mittelst der Substitution (2) wirklich auszuführen, hat man einmal in allen Coefficienten p x durch $\frac{1}{z}$ zu ersetzen und ausserdem die Ableitungen

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

durch

$$\frac{dy}{dz}, \frac{d^2y}{dz^2}, \dots, \frac{d^ny}{dz^n} \text{ und } z$$

auszudrücken. Für Letzteres erhält man die Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} -\frac{dy}{dx} = z^2 \frac{dy}{dz} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = z^4 \frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3 \frac{dy}{dz} \\ -\frac{d^3y}{dx^3} = z^6 \frac{d^3y}{dz^3} + 6z^5 \frac{d^2y}{dz^2} + 6z^4 \frac{dy}{dz} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

allgemein

$$(4) \quad \frac{d^\lambda y}{dz^\lambda} + 1! \binom{\lambda}{1} \binom{\lambda-1}{1} z^{2\lambda-1} \frac{d^{\lambda-1} y}{dz^{\lambda-1}} + \dots + (\lambda-1)! \binom{\lambda}{\lambda-1} \binom{\lambda-1}{\lambda-1} z^{-1} \frac{dy}{dz} \\ (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

Die Richtigkeit der allgemeinen Formel ergibt sich durch die Methode der vollständigen Induction: Angenommen, (4) wäre richtig bis zu irgend einem Wert von λ . Differenziert man dieselbe einmal nach z und beachtet, dass man dazu rechts zunächst nach z differenziert und dann mit $\frac{dz}{dz} = -z^2$ multipliziert, so hat man nach Multiplication mit -1 links

$$(-1)^{\lambda+1} \frac{d^{\lambda+1} y}{dz^{\lambda+1}}$$

und rechts lauter positive Glieder. Dasjenige mit der höchsten Ableitung wird

$$z^{2\lambda+2} \frac{d^{\lambda+1} y}{dz^{\lambda+1}}.$$

Als Coefficient einer beliebigen Ableitung

$$\frac{d^{\lambda-k} y}{dz^{\lambda-k}} \quad (k = 0, 1, \dots, \lambda-1)$$

erhält man aber

$$\left[k! \binom{\lambda}{k} \binom{\lambda-1}{k} (2\lambda - k) + (k+1)! \binom{\lambda}{k+1} \binom{\lambda-1}{k+1} \right] z^{2\lambda-k+1} \\ = (k+1)! \binom{\lambda+1}{k+1} \binom{\lambda}{k+1} z^{2\lambda-k+1},$$

womit bewiesen ist, dass (4) auch gilt, wenn man λ durch $\lambda+1$ ersetzt. Da aber die Formel (4) für $\lambda = 1, 2, 3$ richtig ist, so ist ihre allgemeine Gültigkeit dargethan.

Demnach lautet die durch (2) transformierte Differentialgleichung nach Multiplication mit $(-1)^n$

$$(5) \quad z^{2n} \frac{d^n y}{dz^n} \\ + z^{2n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} \left[1! \binom{n}{1} \binom{n-1}{1} - \frac{1}{z} p_1 \left(\frac{1}{z} \right) \right] \\ + z^{2n-2} \frac{d^{n-2} y}{dz^{n-2}} \left[2! \binom{n}{2} \binom{n-1}{2} - \frac{1}{z} \binom{n-1}{1} \binom{n-2}{1} p_1 \left(\frac{1}{z} \right) + \frac{1}{z^2} p_2 \left(\frac{1}{z} \right) \right] \\ \dots \dots \dots \\ + z^{n+1} \frac{dy}{dz} \left[(n-1)! \binom{n}{n-1} \binom{n-1}{n-1} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{z^{n-1}} p_{n-1} \left(\frac{1}{z} \right) \right] \\ + z^n y \left[(-1)^n \frac{1}{z^n} p_n \left(\frac{1}{z} \right) \right] = 0,$$

oder kurz geschrieben

$$\sum_{k=0}^{k=n} z^{2n-k} \frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} (-1)^{\lambda} (k-\lambda)! \binom{n-\lambda}{k-\lambda} \binom{n-\lambda-1}{k-\lambda} \frac{1}{z^{\lambda}} p_{\lambda} \left(\frac{1}{z} \right) = 0,$$

wo

$$p_0 \equiv 1.$$

Da der Coefficient der höchsten Ableitung in dieser transformierten Gleichung z^{2n} ist und die übrigen Coefficienten linear in den mit Potenzen von z multiplicierten Grossen

$$p_1 \left(\frac{1}{z} \right), \dots, p_n \left(\frac{1}{z} \right)$$

sind, hat (5) als singuläre Stellen im Endlichen nur die reciproken Werte der endlichen singulären Stellen von (1), *ausserdem aber im allgemeinen noch $z=0$ als singuläre Stelle*. Die Umgebung von $z=0$ ist der Kreis um $z=0$, der durch den dem Punkt $z=0$ am nächsten liegenden singulären Punkt von (5) hindurchgeht, bezw. der Kreisring, der aus diesem Kreis durch Ausschluss von $z=0$ selbst entsteht. Da aber $z=0$ dem $x=\infty$ entspricht, werden wir als *Umgebung von $x=\infty$ in Bezug auf die Differentialgleichung (1)* das dem eben beschriebenen nach der Transformation (2) entsprechende Gebiet der x -Ebene bezeichnen müssen. Wir sprechen daher das Ergebnis der bisherigen Untersuchung folgendermassen aus:

Die durch die Substitution (2)

$$x = \frac{1}{z}$$

aus (1) entstehende transformierte Gleichung (5) zeigt, dass $x=\infty$ im allgemeinen die Rolle einer singulären Stelle für die Differentialgleichung (1) spielt und dass als Umgebung von $x=\infty$ der Teil der x -Ebene zu definieren ist, der ausserhalb des Kreises um $x=0$ liegt, welcher durch den von $x=0$ am weitesten entfernten singulären Punkt von (1) hindurchgeht.

98. Allgemeine Gestalt der Integrale in der Umgebung von $x=\infty$. Nach dem Vorstehenden ist nunmehr leicht festzustellen, welches im allgemeinen die analytische Gestalt der Integrale von (1) in der Umgebung U_{∞} von $x=\infty$ ist. Wir können hierbei entweder von Differentialgleichung (5) ausgehen und in dem bei $z=0$ sich ergebenden Fundamentalsystem $z = \frac{1}{x}$ setzen oder aber direkt die innerhalb des Kreisringes U_{∞} gültigen Integrale von (1) aufsuchen.

Auf dem ersteren Wege findet man, dass die Integrale von (5) in der Umgebung von $z=0$ in der Form enthalten sind

$$(6) \quad y = z^s \left[\psi_0(z) + \binom{s}{1} \psi_1(z) \log z + \cdots + \binom{s}{n-1} \psi_{n-1}(z) \log^{n-1} z \right],$$

wo die in der Umgebung von $z=0$ eindeutigen Reihen ψ im allgemeinen unendlich viele negative und positive Potenzen von z enthalten.

man also $z = \frac{1}{x}$, so folgt

$$y = x^{-s} \left[\psi_0\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{s}{1} \psi_1\left(\frac{1}{x}\right) \log x + \cdots + \binom{s}{n-1} \psi_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) \log^{n-1} x \right].$$

Bezeichnet man hierin $-s$ mit r und

$$\binom{s}{k} \psi_{n-k}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ mit } \varphi_{n-k}(x) = \psi_{n-k}\left(\frac{1}{x}\right),$$

so ist

$$(7) \quad y = x^r \left[\varphi_0(x) + \binom{r}{1} \varphi_1(x) \log x + \cdots + \binom{r}{n-1} \varphi_{n-1}(x) \log^{n-1} x \right],$$

wo die φ im allgemeinen unendlich viele positive und negative Potenzen von x enthalten. Gerade diese Gestalt der Integrale, die man ja aber auch, wenn man direkt nach einem in dem Fundamentalsystem der Gleichung (1) frägt, erhält, ist es, die man in der Umgebung von $x=\infty$ an die Stelle von (6) treten läßt.

Wegen der Unmöglichkeit, die Reihen ψ in (6) nach steigenden Potenzen von z geordnet zu denken, so werden wir dazu geführt, die Reihen $\varphi(x)$ in (7), d. h. bei dem in der Umgebung von $x=\infty$ gültigen Fundamentalsystem, uns nach fallenden Potenzen von x geordnet vorzustellen. An und für sich ist es natürlich gleichgültig, ob wir uns hierzu verstehen oder nicht; es tritt nur bei dieser Auffassung schon äußerlich ein Unterschied zwischen den bei $x=\infty$ und den bei $x=0$ gültigen Reihen hervor, der unabhängig davon ist, ob sich die Reihen bei diesen Stellen (Vgl. Art. 100) regelmäßig verhalten oder nicht.

In der Umgebung U_∞ von $x=\infty$ haben die Integrale der Gleichung (1) im allgemeinen die Gestalt

$$y = x^r \left[\varphi_0 + \binom{r}{1} \varphi_1 \log x + \cdots + \binom{r}{n-1} \varphi_{n-1} \log^{n-1} x \right],$$

wo die φ nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihen sind, die im allgemeinen unendlich viele positive und negative Potenzen enthalten.

99. Mannigfaltigkeit des zu $x=\infty$ gehörigen Fundamentalsystems; Invarianz seiner Einteilung in Untergruppen. Da wir die obige Form der Integrale und des ganzen zu U_∞ gehörigen Fundamentalsystems mit Hilfe der Fundamentalgleichung finden, so ist

selbe in bestimmter Weise in Untergruppen eingeteilt. Bei dieser Gelegenheit wollen wir darauf aufmerksam machen, dass die Substitution (2) durch unendlich viele andere ersetzt werden kann, die auch zum Ziel führen, dass wir dabei jedesmal eine *andere* Umgebung der unendlich grossen Werte von x und ein anderes Fundamentalsystem erhalten, dass aber die Einteilung desselben in Untergruppen stets ein und dieselbe ist.

In der That, wenn a ein ganz beliebiger endlicher Wert ist, konnten wir statt (2) die Substitution

$$(2^a) \quad x - a = \frac{1}{z}.$$

benutzen. Es entsprechen dann wieder alle unendlich grossen Werte von x dem Wert $z = 0$, aber den Kreisen um $z = 0$ nunmehr solche um $x = a$. Demnach erhalten wir statt U_∞ eine Umgebung $U_{\infty a}$ mit dem Mittelpunkt $x = a$, nach a zu begrenzt durch einen Kreis um a , der durch den von a am weitesten entfernten endlichen singulären Punkt von (1) hindurchgeht, und die Reihen des innerhalb $U_{\infty a}$ gültigen Fundamentalsystems schreiten nunmehr nach fallenden Potenzen von $x - a$ fort.

Um aber die Form des innerhalb $U_{\infty a}$ gültigen Fundamentalsystems zu ermitteln, brauchen wir die Fundamentalgleichung, welche zu einem Umlauf innerhalb $U_{\infty a}$, etwa auf einem dem Begrenzungskreis von $U_{\infty a}$ concentrischen Kreise gehört. Dieser Umlauf schliesst also die sämtlichen endlichen singulären Punkte ein, welches auch der Mittelpunkt a des jeweils betrachteten Gebietes $U_{\infty a}$ ist, und ergibt daher jedesmal dieselben Linear- und Elementarteiler der Fundamentalgleichung (s. Kap. XI). Die letztere können wir daher füglich *die zu $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung* nennen. Durch sie ist aber die Einteilung des entsprechenden Fundamentalsystems in Gruppen und Untergruppen bestimmt, sodass wir den Satz aussprechen können:

Je nach der Wahl des als Mittelpunkt für die Umgebung von $x = \infty$ dienenden endlichen Punktes $x = a$ bildet diese Umgebung ein anderes Gebiet und hat das zu $x = \infty$ gehörige Fundamentalsystem eine andere Form. Unabhängig aber von jener Wahl ist die zu $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung und damit die Einteilung aller jener Fundamentalsysteme in Gruppen und Untergruppen.

100. Kriterien für die Natur der Stelle $x = \infty$. Wenn $z = 0$ nicht wesentlich singuläre Stelle von (5) ist, werden wir sagen müssen, $x = \infty$ sei nicht wesentlich singuläre Stelle von (1). Nach (5) ist

aber $z = 0$ dann und nur dann nicht wesentlich singuläre Stelle der transformierten Gleichung, wenn die Entwicklungen von

$$p_1\left(\frac{1}{z}\right), p_2\left(\frac{1}{z}\right), \dots, p_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

in der Umgebung von $z = 0$ nicht unendlich viele negative Potenzen von z ergeben. Dies ist offenbar unabhängig davon, ob wir die Transformation (2) oder eine beliebige der Transformationen (2^a) benutzen. Also gilt von $x = \infty$:

$x = \infty$ ist dann und nur dann nicht wesentlich singuläre Stelle der Differentialgleichung (1), wenn die Entwicklungen von

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$$

nach Potenzen von x in dem Kreisring U_∞ nur eine endliche Anzahl positiver Potenzen von x enthalten, - - mit andern Worten - - wenn die Coefficienten $p_1 p_2 \dots p_n$ für $x = \infty$ höchstens von endlicher Ordnung unendlich werden.

Wir bemerken schon hier, dass dieser Fall insbesondere dann eintritt, wenn die Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung rationale Functionen von x sind. Ist nämlich

$$p_k(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \dots + b_{m_1} x^{m_1}}, \text{ wo } a_m \neq 0, b_{m_1} \neq 0,$$

so ist

$$p_k\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^{m_1-m} \cdot a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 z^{m_1} + b_1 z^{m_1-1} + \dots + b_{m_1}}$$

und der Bruch rechts nach positiven Potenzen von z entwickelbar. Wenn also überhaupt $m_1 = m$ negativ ist, so ist z^{m_1-m} jedenfalls die niedrigste Potenz in der Entwicklung von $p_k\left(\frac{1}{z}\right)$, d. h. x^{m-m_1} die höchste in der Entwicklung von $p_k(x)$ in der Umgebung von $x = \infty$.

Aus der Gleichung (5) können wir ferner leicht die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür ablesen, dass $x = \infty$ in Gleichung (1) eine *Stelle der Bestimmtheit für die Integrale* sei. Wir werden nämlich $x = \infty$ dann eine Stelle der Bestimmtheit für die Integrale nennen, wenn in sämtlichen Reihen der Integrale in der Umgebung von $x = \infty$ nach Absonderung des mehrdeutigen Faktors *höchstens eine endliche Anzahl positiver Potenzen von x auftritt*. Dafür, dass dies der Fall sei, ist notwendig und hinreichend, dass $z = 0$ in (5) eine Stelle der Bestimmtheit sei. Dies tritt aber wiederum, wie (5) nach Weglassung des Faktors z^n zeigt, dann und nur dann ein, wenn die Entwicklungen von.

$$\frac{1}{z} p_1\left(\frac{1}{z}\right), \frac{1}{z^2} p_2\left(\frac{1}{z}\right), \dots, \frac{1}{z^n} p_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

nach z keine negativen Potenzen von z enthalten, d. h. wenn $p_1 p_2 \dots p_n$ für $x = \infty$ bzw. mindestens von der 1^{ten}, 2^{ten}, ..., n ^{ten} Ordnung verschwinden:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass $x = \infty$ Stelle der Bestimmtheit für die Integrale der Differentialgleichung (1) sei, bestehen darin, dass für $x = \infty$

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$$

bzw. mindestens von der ersten, zweiten, u. s. w., n ^{ten} Ordnung verschwinden.

Dieser Satz zeigt eine bemerkenswerte Verschiedenheit zwischen $x = \infty$ und endlichen Werten von x in Bezug auf die Differentialgleichung. Während ein endlicher Wert von x nur dann eine singuläre Stelle für die *Integrale* bilden konnte, wenn er ein singulärer Punkt der *Differentialgleichung* war, d. h. wenn für ihn mindestens ein Coefficient in der mit dem höchsten Coefficienten 1 genommenen Differentialgleichung unendlich wurde, ist es nach dem obigen Satz möglich, dass $x = \infty$ singuläre Stelle der *Integrale* ist, ohne singuläre Stelle der Coefficienten zu sein. Es war auch aus diesem Grunde erforderlich, $x = \infty$ als Stelle der Bestimmtheit von den Integralen ausgehend zu definieren, statt, wie bei endlichen Werten, von den Coefficienten der Differentialgleichung, ganz abgesehen davon, dass wir den Begriff einer zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung, der uns bei endlichen Werten zu der Definition führte, ja noch gar nicht aufgestellt haben.

Endlich kann man noch nach den Bedingungen dafür fragen, dass $x = \infty$ *reguläre Stelle* für die Integrale der Differentialgleichung (1) in dem Sinn sei, dass in der Umgebung von $x = \infty$ das allgemeine Integral von (1) eine gewöhnliche Potenzreihe von x^{-1} ist, bei welcher die Coefficienten von

$$x^0, x^{-1}, \dots, x^{-n+1}$$

willkürlich sind. Dazu muss also Gleichung (5) in $z = 0$ eine reguläre Stelle haben, d. h. wenn man durch z^{2n} dividiert, dürfen sämtliche Coefficienten von (5) nur positive Potenzen von z enthalten. Dies giebt gewisse Gleichungen zur Bestimmung der ersten Glieder in den Entwicklungen von $p_1\left(\frac{1}{z}\right), p_2\left(\frac{1}{z}\right), \dots, p_n\left(\frac{1}{z}\right)$ nach z , worauf wir jedoch nicht weiter eingehen wollen.

101. Recursionsformel bei $x = \infty$. Wenn $x = \infty$ ausserlich singuläre Stelle ist, kann es bei $x = \infty$ sich bestimmende Integrale geben, die wir mit Hilfe einer Recursionsformel berechnen können. Wir könnten uns zu dem Ende wieder auf die Formel (5) berufen, dass dies für $x = \frac{1}{z}$ sich bei $z = 0$ bestimmt vorfindet. Diese Integrale von (5) sein müssen, deren Berechnung nach (1) bekannt ist. Wir ziehen es jedoch vor, den Umweg über (5) zu vermeiden, um Formeln zu erhalten, die sich unmittelbar auf die Gleichung (1) selbst anwenden lassen, zumal da wir diese nahezu unverändert aus den entsprechenden in Artikel 6, 7, 8 ablesen können.

Zu dem Ende setzen wir die Differentialgleichung (1) in

$$(8) \quad P(x, y) = x^n \sum_k \pi_{0k} x^k y^{(n)} + x^{n-1} \sum_k \pi_{1k} x^k y^{(n-1)} + \dots + \sum_k \pi_{nk} x^k y^{(k)} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

wo die Coefficienten in bei $x = \infty$ gültige Reihen entwickeln und mindestens eine der Grössen

$$\pi_{00}, \pi_{10}, \dots, \pi_{n0}$$

von Null verschieden ist. Diese Gestalt (8) der Differentialgleichung wollen wir ihre *Normalform bei $x = \infty$* nennen. Sie unterscheidet sich von der bei $x = 0$ gültigen Normalform nur dadurch, dass die Grössen

$$x^n y^{(n)}, x^{n-1} y^{(n-1)}, \dots, y$$

hier gewöhnliche Potenzreihen von $\frac{1}{x}$, dort aber solche von x multipliciert sind. Dann substituieren wir in (8)

$$(9) \quad y = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \quad (\alpha = \alpha, \alpha - 1, \alpha - 2, \dots)$$

und suchen die Bestimmungsgleichungen für die c , damit (9) erfüllt wird. Wie in Artikel 6 folgt dann

$$(10) \quad P(x, \eta) = \sum_{\nu} \sum_k \sum_s \pi_{\nu k} s(s-1) \dots (s-n+\nu+1) \binom{\alpha = \alpha, \alpha-1, \alpha-2, \dots}{\lambda = 0, -1, -2, \dots} \binom{\nu = 0, 1, \dots, n}{\dots},$$

$$s + \lambda = k$$

setzt,

$$(10^u) \quad P(x, \eta) = \sum_{\nu} \sum_s \sum_k \pi_{\nu, k-s} s(s-1) \cdots (s-n+\nu+1) c_s x^k$$

$$\left(\begin{array}{l} k = \alpha, \alpha-1, \alpha-2, \dots \\ s = \alpha, \alpha-1, \dots, k \\ \nu = 0, 1, \dots, n \end{array} \right)$$

oder endlich, wenn

$$(11) \quad \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \pi_{\nu, k-s} s(s-1) \cdots (s-n+\nu+1) \equiv a_{ks}$$

und

$$(12) \quad a_{k\alpha} c_{\alpha} + a_{k, \alpha-1} c_{\alpha-1} + \cdots + a_{kk} c_k \equiv F_{k\alpha}$$

gesetzt wird,

$$(10^b) \quad P(x, \eta) = \sum_{(k)} F_{k\alpha} x^k \quad (k = \alpha, \alpha-1, \alpha-2, \dots).$$

Die Recursionsformel für die Coefficienten der Reihe (9), d. h. *die zu* $x = \infty$ *gehörige Recursionsformel der Differentialgleichung* (8) lautet daher

$$(13) \quad F_{k\alpha} \equiv a_{k\alpha} c_{\alpha} + a_{k, \alpha-1} c_{\alpha-1} + \cdots + a_{kk} c_k = 0,$$

wo die a_{ks} durch (11) bestimmt sind.

102. Die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Gleichung. Wie in Artikel 7 erschliessen wir nunmehr auch hier, dass der Anfangsexponent α der nach fallenden Potenzen von x geordneten Reihe η der Gleichung

$$a_{kk} = 0$$

genügen muss. Diese Gleichung lautet ausführlich geschrieben

$$(14) \quad a_{kk} \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \pi_{\nu 0} k(k-1) \cdots (k-n+\nu+1) = 0.$$

Weil Gleichung (14) die Anfangsexponenten der in der Umgebung von $x = \infty$ gültigen, nach fallenden Potenzen von x fortschreitenden Reihen bestimmt, wollen wir sie *die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Gleichung*, a_{kk} selbst *die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Function* nennen. Da nun eine mit x^{α} beginnende Reihe (9) einer nach steigenden Potenzen von z geordneten, mit $\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha} \equiv z^{-\alpha}$ beginnenden Reihe entspricht, die der transformierten Gleichung (5) genügt, so erkennen wir, dass die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinie-

renden Gleichung von (8) oder (1) die *entgegengesetzten* Werte der Wurzeln der zu $z = 0$ gehörigen determinierenden Gleichung von (5) sind, was sich leicht auch direkt durch Aufstellung der letzteren verificieren lässt¹⁾.

Wie in Artikel 8 fragen wir nun insbesondere, unter welchen Bedingungen die determinierende Function vom Grade n ist. Hierfür ist nach (14) notwendig und hinreichend, dass

$$\pi_{00} \neq 0$$

ist. Wenn diese Bedingung aber erfüllt ist, so verschwinden nach Division durch den Coefficienten von $y^{(n)}$ in Gleichung (8) die Coefficienten von $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y$ für $x \rightarrow \infty$ bzw. mindestens von der ersten, zweiten, \dots, n^{ten} Ordnung, und hieraus folgt nach Art. 100, dass $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit für die Integrale ist. Somit haben wir gezeigt:

Dann und nur dann, wenn die Differentialgleichung bei $x = \infty$ sich in die Form bringen lässt

$$(15) \quad x^n \mathfrak{P}_0 \left(\frac{1}{x} \right) y^{(n)} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1 \left(\frac{1}{x} \right) y^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{P}_n \left(\frac{1}{x} \right) y = 0,$$

wo $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ sind und $\mathfrak{P}_n \left(\frac{1}{x} \right)$ für $x = \infty$ nicht verschwindet, verhalten sich alle Integrale der Differentialgleichung bei $x = \infty$ bestimmt.

Alles Weitere — die Verwertung der Recursionsformel, die Convergenzfrage, die Berechnung der logarithmenbehafteten Integrale, den Fall, dass der Grad der determinierenden Function zwischen 0 und n liegt, — brauchen wir nun nicht mehr zu verfolgen, da sich alle Formeln jetzt unmittelbar aus den schon aufgestellten wie bei einer endlichen Stelle ablesen lassen, für alle theoretischen Erörterungen aber immer die Gleichung (5) zur Seite steht.

1) Es muss bemerkt werden, dass wir mit der obigen Definition der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung von der sonst allgemein üblichen abweichen. Fuchs und mit ihm — soweit die Kenntnis des Verf. reicht — alle anderen Schriftsteller verstehen unter der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung die zu $z = 0$ gehörige der transformierten Gleichung. (Vergl. z. B. Crolles Journ. Bd. 76. (1873) S. 181, 182). Unsere obige Entwicklung dürfte indessen den Vorschlag rechtfertigen, die hier gegebene Definition anzunehmen, weil doch die transformierte Gleichung nur als ein vorübergehendes Hilfsmittel gelten kann, die vorgelegte Gleichung selbst aber bei Verfolgung der Analogie mit den endlichen Stellen unmittelbar zu der von uns gegebenen Definition führt. Die Annahme der letzteren würde überdies manchen Formeln noch zur Vereinfachung dienen. (Vergl. z. B. Art. 105, 106). Erheblich ist ja der Unterschied zwischen beiden Definitionen nicht, da, wie oben gezeigt wird, die Wurzeln der einen Gleichung die entgegengesetzten Werte der andern sind.

103. Beispiele. 1. Beispiel:

$$(16) \quad y' - e^x y = 0.$$

Da

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

eine beständig convergente Potenzreihe ist, d. h. für die ganze x -Ebene Gültigkeit hat, fällt hier die Umgebung von $x = 0$ mit der von $x = \infty$ zusammen. Da aber diese Entwicklung unendlich viele positive Potenzen enthält, ist $x = \infty$ hier *wesentlich singuläre Stelle*.

2. Beispiel:

$$(17) \quad y' - e^{\frac{1}{x}} y = 0.$$

Die Entwicklung

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1!x} + \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{3!x^3} + \dots$$

ist gültig in der ganzen x -Ebene ausserhalb eines mit beliebig kleinem Radius um $x = 0$ geschlagenen Kreises. Dieser Bereich ist also wieder gleichzeitig die Umgebung von $x = 0$ und $x = \infty$, was in beiden Fällen daher rührt, dass zwischen 0 und ∞ kein singulärer Punkt liegt. Da aber die letztere Entwicklung gar keine positiven Potenzen von x enthält, ist $x = \infty$ ausserwesentlich singuläre Stelle für (17). $x = \infty$ ist aber nicht Stelle der Bestimmtheit, weil der Coefficient von y' den Wert 1 hat und der von y für $x = \infty$ nicht verschwindet. In der That ist die determinierende Function eine Constante $= -1$.

3. Beispiel: Die Differentialgleichung mit constanten Coefficienten

$$(18) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$$

hat offenbar $x = \infty$ wieder als ausserwesentlich singuläre Stelle, aber im allgemeinen *nicht* als Stelle der Bestimmtheit, es sei denn, dass

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

wäre. Dann reducirt sich die Differentialgleichung auf

$$y^{(n)} = 0$$

und hat in der That die Integrale

$$1, x, x^2, \dots, x^{n-1},$$

die sich bei $x = \infty$ bestimmt verhalten. Ist a_{n-1} das letzte in der Reihenfolge $a_1 a_2 \dots a_n$ nicht verschwindende a , so lautet die Differentialgleichung, in der Normalform bei $x = \infty$ geschrieben,

$$x^n \cdot x^{-n+\lambda} y^{(n)} + x^{n-1} \cdot x^{-n+\lambda+1} a_1 y^{(n-1)} + \dots + x^2 a_{n-2} y^{(2)} = 0.$$

Sie hat daher unter anderen die Integrale

$$1, x, x^2, \dots, x^{\lambda-1},$$

und ihre determinierende Gleichung bei $x = \infty$ ist

$$a_{n-\lambda}k(k-1) \dots (k-\lambda+1) = 0$$

mit den Wurzeln $0, 1, \dots, \lambda-1$. Die Zahl der obigen bei $x = \infty$ sich bestimmt verhaltenden, linear unabhängigen Integrale ist also gleich dem Grad der determinierenden Function, und folglich hat die Gleichung — um dies beiläufig zu bemerken — nach Artikel 91 keine anderen, von jenen linear unabhängige, bei $x = \infty$ sich bestimmt verhaltende Integrale.

4. *Beispiel:* Bei der Differentialgleichung

$$(19) \quad x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

wo die a Constanten sind, ist wieder die Umgebung von $x = 0$ zugleich die von $x = \infty$. Da man aber die a sowohl als Anfangsglieder von gewöhnlichen Potenzreihen von x als auch von solchen von $\frac{1}{x}$ ansehen kann, ist nicht nur $x = 0$, sondern nach (15) auch $x = \infty$ Stelle der Bestimmtheit. Diese von uns schon oft als Beispiel benutzte Differentialgleichung ist also dadurch ausgezeichnet, dass sie ausser $x = 0$ höchstens noch $x = \infty$ als singuläre Stelle, beide aber jedenfalls als Stellen der Bestimmtheit hat.

Hat die zu $x = 0$ gehörige determinierende Gleichung die Wurzeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

von denen nicht zwei einander gleich sein mögen, so lauten die Integrale

$$x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n},$$

welche ebenfalls bei $x = 0$ wie bei $x = \infty$ gültig sind; daher muss die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Function mit der zu $x = 0$ gehörigen, bis auf einen constanten Factor höchstens, identisch sein. Bildet man in der That die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Function, so lautet dieselbe nach (14)

$$k(k-1) \dots (k-n+1) + a_1 k(k-1) \dots (k-n+2) + \dots + a_n,$$

was nach Art. 10 auch die zu $x = 0$ gehörige determinierende Function von (19) ist.

Damit nun $x = \infty$ insbesondere reguläre Stelle für (19) sei, muss diese die Integrale

$$1, x^{-1}, x^{-2}, \dots, x^{-n+1},$$

die determinierende Gleichung also die Wurzeln $0, -1, \dots, -n+1$ haben oder

$$k(k+1)\dots(k+n-1)=0$$

uten; und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, sind die Integrale bei $=\infty$ regulär. Bestimmt man demgemäss die Werte der a , so ergibt sich (am einfachsten unter Benutzung von (5))

$$a_\lambda = \lambda! \binom{n}{\lambda} \binom{n-1}{\lambda} \quad (\lambda=1, 2, \dots, n),$$

so dass $a_n = 0$ ist.

Die Differentialgleichung

$$x^n y^{(n)} + 1! \binom{n}{1} \binom{n-1}{1} x^{n-1} y^{(n-1)}$$

$$+ 2! \binom{n}{2} \binom{n-1}{2} x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + (n-1)! \binom{n}{n-1} \binom{n-1}{n-1} xy' = 0$$

ist also $x = \infty$ als reguläre Stelle.

Kapitel XV.

Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse.

104. Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten. Mit dem vorigen Kapitel haben wir zwar die in der Einleitung gestellte Aufgabe — Nachweis der Existenz von Integralen und Untersuchung des Verhaltens derselben in der Umgebung der einzelnen Werte von x — insoweit erledigt, wie es sich diese Einführung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen zum Ziel setzen wollte. Hierbei ist aber von Anfang an ein so scharfer Unterschied zwischen den Stellen der Bestimmtheit und denen der Unbestimmtheit hervorgetreten, dass derselbe geradezu dazu herausfordert, denjenigen *Differentialgleichungen, welche nur Stellen der Bestimmtheit besitzen*, noch eine besondere Betrachtung zu widmen, die den Gegenstand dieses letzten Kapitels bilden soll.

Dies rechtfertigt sich auch noch aus zwei weiteren Gründen, einem historischen und einem praktischen. Die gedachten Differentialgleichungen waren die ersten, die in den grundlegenden Untersuchungen von Fuchs¹⁾ besonders charakterisiert wurden und eine eingehende Behandlung erfuhren. Wir wollen deshalb solche lineare homogene Differentialgleichungen, welche mit Einschluss von $x = \infty$ nur Stellen der Bestimmtheit besitzen, als *Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse* bezeichnen. Gerade an diese Klasse knüpfen aber auch die meisten Specialuntersuchungen und Anwendungen an, zu welchen die Theorie der linearen Differentialgleichungen seitdem geführt hat, sodass es für das weitere Studium dieser Theorie von Wert ist, mit dieser besonderen Klasse von Differentialgleichungen bekannt zu sein.

Weil aber Stellen der Bestimmtheit ausserwesentlich singuläre Stellen der Differentialgleichung sind, ziehen wir die Schranken zunächst etwas weiter und fragen nach der Gestalt solcher *Differentialgleichungen, welche mit Einschluss von $x = \infty$ nur ausserwesentlich sin-*

1) Crelles Journ. Bd. 66. (1866) und 68. (1868).

guldre Stellen haben. Es sollen also die eindeutigen Coefficienten der Differentialgleichung

$$(1) \quad P(x, y) \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

für jeden endlichen Wert, für den sie überhaupt unendlich werden, und ebenso für $x = \infty$ (s. Art. 100) nur von endlicher Ordnung unendlich werden. Eindeutige Functionen aber, welche im Endlichen und Unendlichen nur ausserwesentlich singular werden, sind nach einem Satze der Functionentheorie¹⁾ rationale Functionen. Wir haben also zunächst das Resultat:

Eine Differentialgleichung, welche im Endlichen und Unendlichen nur ausserwesentlich singuläre Stellen besitzt, hat rationale Coefficienten.

• 105. Gemeinschaftliche Recursionsformel bei $x=0$ und $x=\infty$ für Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten. Bevor wir nun zu den Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse übergehen, wollen wir eine bemerkenswerte Eigenschaft hervorheben, die allen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten zukommt.

Um bei einer solchen die zu $x=0$ gehörige Recursionsformel zu bilden, können wir die Differentialgleichung in die Form

$$(2) \quad p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

setzen, wo $p_0 p_1 \dots p_n$ ganze rationale Functionen von x ohne gemeinsamen Teiler sind. Da sich also der Gültigkeitsbereich dieser Functionen $p_0 \dots p_n$ über die ganze x -Ebene erstreckt, können wir eben diese Gestalt (2) der Differentialgleichung auch zur Bildung der zu $x=\infty$ gehörigen Recursionsformel benutzen. Um für die Bildung der ersten Recursionsformel die Formeln des Artikels 6 anwenden zu können, setzen wir die Differentialgleichung in die Normalform

$$(3) \quad x^n g_0 y^{(n)} + x^{n-1} g_1 y^{(n-1)} + \dots + g_n y = 0,$$

wobei die g wieder ganze Functionen sind und mindestens eine von ihnen für $x=0$ nicht verschwindet. Da die g also nicht mehr wie die Coefficienten der im Artikel 6 zu Grunde gelegten Gleichung (3) (Art. 5) unendliche Reihen sind, wird auch die hier entstehende Recursionsformel nicht eine mit k beständig wachsende Gliederzahl enthalten, sondern in Bezug auf diese constant bleiben, sobald k um eine gewisse Zahl grösser als α ist. Diese constante Gliederzahl ist leicht zu ermitteln.

1) Vergl. z. B. Briot et Rouquet, Théorie des fonctions elliptiques. 2^{me} éd., Paris 1875. S. 206.

Es sei $\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n$ bezw. der Grad von $g_0 g_1 \dots g_n$, und λ die grösste der Zahlen $\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n$. Dann sind in Formel (7) (Art. 6) sämtliche $p_{r, k-s} = 0$, bei denen $k-s > \lambda$, während mindestens eine der Grössen $p_{r,2} \neq 0$ ist; es ist folglich

$$a_{k,s} = 0 \quad \text{für } s < k - \lambda,$$

während $a_{k, k-\lambda} \neq 0$ ist. Die Recursionsformel (8) (Art. 6) enthält also nur die Glieder mit

$$c_k, c_{k-1}, \dots, c_{k-\lambda},$$

d. h. wenn wir

$$(4) \quad \lambda - 1 = m$$

setzen, m Glieder und lautet demnach

$$(5) \quad P'_{k\alpha} = a_{kk} c_k + a_{k, k-1} c_{k-1} + \dots + a_{k, k-m+1} c_{k-m+1} = 0, \\ (k = \alpha, \alpha+1, \alpha+2, \dots)$$

wo die $a_{k,s}$ die durch (7) Art. 6 bestimmten ganzen Functionen von k sind. Dieser Formel müssen also je m auf einander folgende Coefficienten $c_k, c_{k-1}, \dots, c_{k-m+1}$, die mit den Potenzen $x^k, x^{k-1}, \dots, x^{k-m+1}$ in irgend einer die Differentialgleichung (2) bezw. (3) befriedigenden Reihe

$$\sum_{(v)} c_v x^v$$

multipliziert sind, genügen. Da nun aber zur Bildung des Ausdrucks $P'_{k\alpha}$ in (5) nur das *endliche* Stück

$$c_{k-m+1} x^{k-m+1} + \dots + c_{k-1} x^{k-1} + c_k x^k$$

jener Reihe beiträgt, so ist es offenbar ganz gleichgültig, ob die Reihe selbst als eine unendliche angesetzt ist, ob sie in Richtung der wachsenden oder der abnehmenden Exponenten, oder selbst nach beiden Richtungen¹⁾ in's Unendliche läuft. Wir können daher (5) gleichzeitig als zu $x = \infty$ gehörige Recursionsformel auffassen und benutzen; der einzige Unterschied ist der, dass man, wenn es sich um eine Reihe mit steigenden Potenzen von x handelt, vermöge der Formel (5)

$$c_k \text{ durch } c_{k-1}, c_{k-2}, \dots,$$

andernfalls dagegen

$$c_{k-m+1} \text{ durch } c_{k-m+2}, c_{k-m+3}, \dots$$

ausdrückt.

1) In diesem Falle würden wir allerdings die Recursionsformel zur wirklichen Berechnung der Reihe mit elementaren Hilfsmitteln nicht benutzen können. Vergl. hierzu von Koch, Acta Math. Bd. 15. (1891), Bd. 16. (1892).

Vergleicht man nun (5) mit der in Artikel 101 aufgestellten, zu $x = \infty$ gehörigen Recursionsformel (13), so war dort c_k das mit dem *niedrigsten* Index versehene c , welches in der Formel auftritt. Um in dieser Beziehung unsere jetzige Formel mit der dortigen noch in Übereinstimmung zu bringen, brauchen wir nur

$$k \text{ durch } k + m - 1$$

zu ersetzen, und erhalten so

$$(6) \quad a_{k+m-1, k+m-1} c_{k+m-1} + \dots + a_{k+m-1, k} c_k = 0$$

als zu $x = \infty$ gehörige Recursionsformel. Bei dieser Schreibart ist aber der Coefficient von c_k

$$(7) \quad a_{k+m-1, k} = \sum_{v=0}^{v=n} \frac{g_v^{(m-1)}(0)}{m-1!} k(k-1) \dots (k-n+v+1)$$

die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Function.

Wir haben also zunächst das Ergebnis:

Bei Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten folgen die nach aufsteigenden und die nach absteigenden Potenzen von x fortschreitenden Reihen ein und derselben, bzw. nur in umgekehrter Richtung zu lesenden Recursionsformel. Der Coefficient von c_k ist dabei die zu $x=0$ oder zu $x = \infty$ gehörige determinierende Function, je nachdem c_k das c mit höchstem oder niedrigstem Index in der Formel ist¹⁾.

106. Gemeinschaftlicher Algorithmus der Integrale von Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten bei $x=0$ und $x=\infty$. Aus dem vorstehenden Satz wollen wir noch eine Folgerung in Bezug auf die Integrale selbst ziehen, für den Fall wenigstens, dass sich bei $x=0$ bestimmt verhaltende Integrale, also auch solche von der ersten Stufe existieren.

Zu dem Ende führen wir die Grössen

$$\alpha_{\mu\nu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m; \nu = 1, 2, \dots, n)$$

und m Grössen a_1, a_2, \dots, a_m durch die Identitäten

$$(8) \quad \begin{cases} a_{kk} & a_1(k - \alpha_{11}) & \dots & (k - \alpha_{1n}) \\ a_{k, k-1} & a_2(k - 1 - \alpha_{21}) & \dots & (k - 1 - \alpha_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k, k-m+1} & a_m(k - m + 1 - \alpha_{m1}) & \dots & (k - m + 1 - \alpha_{mn}) \end{cases}$$

ein, wobei zu bemerken ist, dass wenn a_{ks} niedrigeren als n^{ten} Grades ist, die entsprechende Identität (8) weniger als n Grössen α definiert. Hiernach sind

1) Vergl. Crelle's Journ. Bd. 106. (1890). S. 269 ff.

$$(6^b) \quad \alpha_m (\alpha_{m1} - k) (\alpha_{m2} - k) \dots (\alpha_{mn} - k) c_k \\ + \dots \dots \dots \\ + \alpha_1 (\alpha_{11} - k - m + 1) \dots (\alpha_{1n} - k - m + 1) c_{k+m-1} = 0.$$

Ist nun α_{mi} wieder eine Wurzel der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung, welche die kleinste in ihrer Gruppe sein möge und zu der ein sich bei $x = \infty$ bestimmt verhaltendes Integral $y_{\infty i}$ wirklich gehört, so wird dieses berechnet, indem man in (6^b) für k die Werte α_{mi} , $\alpha_{mi} - 1$, $\alpha_{mi} - 2$, ... einsetzt. Vergleicht man aber dann die Formeln (5^a) und (6^b) miteinander, so zeigt sich, dass nach der letzteren

$$c_k \text{ aus } c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_{k+m-1}$$

geradeso berechnet wird, wie nach der ersteren

$$c_k \text{ aus } c_{k-1}, c_{k-2}, \dots, c_{k-m+1},$$

falls man $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ bzw. durch $\alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_1$ und die Differenzen $\alpha_{1i} - \alpha_{\mu\nu}$ durch die Differenzen $\alpha_{m-\mu+1, \nu} - \alpha_{mi}$ ersetzt. Demnach wird das Integral $y_{\infty i}$ auch durch den Algorithmus Φ gegeben; es ist

$$(10) \quad y_{\infty i} = x^{\alpha_{mi}} \Phi \left(\alpha_m \dots \alpha_1; \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{m1} - \alpha_{mi}, \dots, \alpha_{mn} - \alpha_{mi} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{11} - \alpha_{mi}, \dots, \alpha_{1n} - \alpha_{mi} \end{array} \right\}; x^{-1} \right).$$

Wir dürfen also sagen:

Bei einer Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten werden die bei $x = 0$ und die bei $x = \infty$ sich bestimmt verhaltenden Integrale erster Stufe durch ein und denselben Algorithmus geliefert, in welchem nur die Parameter sich in bestimmter Weise ändern¹⁾.

107. Anwendung auf die Gauss'sche Differentialgleichung.

Wir wollen die Ergebnisse der beiden letzten Artikel sogleich an dem Beispiel der Gauss'schen Differentialgleichung

$$(11) \quad x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0$$

1) Vergl. Crelles Journ. Bd. 109. (1892). S. 222—224. — Die in dem obigen Satz ausgedrückte Eigenschaft der Integrale trat zuerst bei der Gauss'schen Differentialgleichung hervor (s. folgenden Art.), dann bei allen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse (vgl. Seifert, In.-Diss., Göttingen, 1875 und des Verf. In.-Diss., Berlin, 1886), endlich bei den Differentialgleichungen mit zweigliedriger Recursionsformel (vgl. Pochhammer, Crelles Journ. Bd. 102 (1888), Bd. 108 (1891) und andere Aufsätze desselben Autors). — Bezüglich der Einführung der Parameter $\alpha_{\mu\nu}$ vergl. auch Schafheitlin, In.-Diss., Halle, 1885, und Crelles Journ. Bd. 106 (1890).

veranschaulichen, in welcher γ nicht gleich Null oder ganzzahlig α und β nicht um eine ganze Zahl verschieden oder gleich seien.

Die zu $x = 0$ gehörige Recursionsformel lautet (s. Art. 10)

$$(12) \quad k(k + \gamma - 1)c_k - (k + \alpha - 1)(k + \beta - 1)c_{k-1} = 0,$$

welche gleichzeitig als zu $x = \infty$ gehörige Recursionsformel

Um sie als solche zu benutzen, schreiben wir statt (12)

$$(12^a) \quad (k + 1)(k + \gamma)c_{k+1} - (k + \alpha)(k + \beta)c_k = 0.$$

Die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Gleichung ist also zweiten Grades

$$(k + \alpha)(k + \beta) = 0$$

mit den Wurzeln $-\alpha, -\beta$; $x = \infty$ ist also Stelle der Bestimmtheit und die zugehörigen Integrale sind beide erster Stufe, da $-\alpha, -\beta$ nach Voraussetzung keine Gruppe bilden. Das Gleiche gilt von den zu $x = 0$ gehörigen Integralen, da auch 0 und $1 - \gamma$ nicht um eine ganze Zahl oder Null verschieden sind.

Verglichen mit den Bezeichnungen des vorigen Artikels ist

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, & \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_{11} &= 0, & \alpha_{12} &= 1 - \gamma \\ \alpha_{21} &= -\alpha, & \alpha_{22} &= -\beta. \end{aligned}$$

Die α brauchen also in das Symbol Φ für die Integralreihe hier nicht aufgenommen zu werden, da durch die Vertauschung derselben nur die Recursionsformel mit -1 multipliziert, die Reihe also nicht geändert wird. Weiter bemerkt man, dass schon in der ersten Reihe Φ des vorigen Artikels die in derselben Zeile stehenden Differenzen der α beliebig unter einander vertauscht werden dürfen, weil dadurch nur die Faktoren von Produkten unter einander vertauscht werden. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes hat man hier

$$(13) \quad \begin{cases} y_{00} = \Phi \left(\begin{smallmatrix} 0, \gamma-1 \\ \alpha, \beta \end{smallmatrix}; x \right) \\ y_{0, 1-\gamma} = x^{1-\gamma} \Phi \left(\begin{smallmatrix} 0, \gamma-1 \\ \alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma \end{smallmatrix}; x \right) \\ y_{\infty, -\alpha} = x^{-\alpha} \Phi \left(\begin{smallmatrix} 0, \alpha-\beta \\ \alpha, \alpha-\gamma+1 \end{smallmatrix}; x^{-1} \right) \\ y_{\infty, -\beta} = x^{-\beta} \Phi \left(\begin{smallmatrix} 0, \beta-\alpha \\ \beta, \beta-\gamma+1 \end{smallmatrix}; x^{-1} \right). \end{cases}$$

Für die Reihe y_{00} haben wir aber schon im Artikel 23 die übliche Bezeichnung $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ eingeführt; es ist also

$$(14) \quad \Phi \left(\begin{smallmatrix} 0, \gamma-1 \\ \alpha, \beta \end{smallmatrix}; x \right) = F(\alpha, \beta, \gamma; x),$$

und mittelst dieser Identität können wir auch die drei anderen Φ -Reihen von (13) in I' -Reihen übersetzen. So erhalten wir die Integrale bei $x = 0$ und $x = \infty$ in der Gestalt

$$(13^a) \quad \begin{cases} y_{00} = I'(\alpha, \beta, \gamma; x) \\ y_{0, 1-\gamma} = x^{1-\gamma} I'(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x) \\ y_{\infty, -\alpha} = x^{-\alpha} I'(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; x^{-1}) \\ y_{\infty, -\beta} = x^{-\beta} I'(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; x^{-1}), \end{cases}$$

von denen wir das zweite gleichlautend bereits in Art. 23 gefunden haben.

In gleich einfacher Weise gelangt man zu den nach steigenden und nach fallenden Potenzen von $x - 1$ fortschreitenden Integralreihen der Gauss'schen Differentialgleichung.

108. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse. Wenn nun die Differentialgleichung

$$(15) \quad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0$$

der Fuchs'schen Klasse angehört, so besitzt dieselbe nach Definition mit Einschluss von $x = \infty$ nur Stellen der Bestimmtheit als singuläre Stellen. Die Coefficienten p sind daher rationale Functionen und die Zahl der singulären Stellen ist eine endliche.

Seien

$$a_1 \ a_2 \ \dots \ a_q$$

die sämtlichen, im Endlichen gelegenen singulären Stellen von (15), zu denen im allgemeinen noch $x = \infty$ als $(q + 1)^{\text{te}}$ singuläre Stelle hinzutritt. Damit nun a_i eine Stelle der Bestimmtheit ist, ist notwendig und hinreichend (s. Gl. (10') Art. 8), dass p_λ für $x = a_i$ höchstens von der λ^{ten} Ordnung,

$$p_\lambda (x - a_i)^\lambda$$

für $x = a_i$ also gar nicht unendlich wird. Setzt man daher

$$(16) \quad \psi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_q),$$

so darf

$$p_\lambda \psi(x)^\lambda$$

für keinen endlichen Wert von x unendlich werden, und da p_λ eine rationale Function ist, so muss jenes Produkt eine ganze rationale Function von x sein

$$(17) \quad p_\lambda \psi(x)^\lambda = t_\lambda(x) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n).$$

Damit nun auch $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit sei, ist notwendig und hinreichend (s. Art. 100 und 102), dass $p_\lambda(x)$ für $x = \infty$

mindestens von der λ^{ten} Ordnung verschwindet. Dies tritt aber und nur dann ein, wenn in

$$p_\lambda \equiv \frac{G_\lambda(x)}{\psi(x)^\lambda}$$

der Grad des Zählers G_λ mindestens um λ Einheiten hinter den Nenners, d. h. $q\lambda$ zurückbleibt. Bezeichnen wir also jetzt mit

$$g_{\lambda(q-1)}(x)$$

eine ganze rationale Function von x , deren Grad $\leq \lambda(q-1)$ muss p_λ die Form haben

$$(19) \quad p_\lambda(x) \equiv \frac{g_{\lambda(q-1)}(x)}{\psi(x)^\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n).$$

Wir sind also zu dem Ergebnis gelangt:

Die linearen homogenen Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse haben die Gestalt

$$(19) \quad y^{(n)} + \frac{g_{q-1}}{\psi} y^{(n-1)} + \frac{g_{2(q-1)}}{\psi^2} y^{(n-2)} + \dots + \frac{g_{n(q-1)}}{\psi^n} y = 0$$

wo

$$\psi \equiv (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_q),$$

$a_1 a_2 \dots a_q$ die sämtlichen singulären Punkte im Endlichen sind und $\frac{g_{\lambda(q-1)}}{\psi^\lambda}$ eine ganze rationale Function von x bedeutet, deren Grad $\leq \lambda$. Umgekehrt hat jede Differentialgleichung der Gestalt (19) nur Stelle Bestimmtheit¹⁾.

109. Beziehung zwischen den Wurzeln der determinierenden Gleichungen aller singulären Punkte. Abgesehen von der gemeinsamen Recursionsformel und dem daraus entspringenden gemeinsamen Algorithmus der Integrale bei $x=0$ und $x=\infty$, die wir schon kennen gelernt haben, können wir für die Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse speziell noch einen weiteren Satz, der sich auf die determinierenden Gleichungen aller singulären Punkte bezieht, ableiten.

Zu dem Ende zerlegen wir den Coefficienten

$$p_1 \equiv \frac{g_{q-1}}{\psi}$$

in Partialbrüche

$$(20) \quad p_1 \equiv \frac{g_{q-1}}{\psi} \equiv \frac{\alpha_1}{x - a_1} + \frac{\alpha_2}{x - a_2} + \dots + \frac{\alpha_q}{x - a_q},$$

sodass

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. (1866). S. 146.

$$[p_1(x - a_i)]_{x=a_i} \equiv \alpha_i \quad (i=1, 2, \dots, \varrho).$$

Daher lauten die beiden ersten Terme der zu $x = a_i$ gehörigen determinierenden Function

$$r(r-1) \cdots (r-n+1) + \alpha_i r(r-1) \cdots (r-n+2),$$

während alle folgenden niedrigeren als $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in r sind. Der Coefficient von r^{n-1} in der determinierenden Gleichung ist daher

$$\alpha_i - \frac{n(n-1)}{2},$$

während der von r^n gleich 1 ist. Demnach ist

$$\frac{n(n-1)}{2} - \alpha_i \equiv \sum_{k=1}^{k=n} r_{ik},$$

die Summe der Wurzeln der zu $x = a_i$ gehörigen determinierenden Gleichung und

$$(21) \quad \varrho \frac{n(n-1)}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho) \equiv \sum_{i,k} r_{ik} \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, \varrho \\ k=1, 2, \dots, n \end{matrix} \right),$$

die Summe aller Wurzeln der zu den ϱ endlichen singulären Punkten gehörigen determinierenden Gleichungen.

Die beiden ersten Terme der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Function von (19) lauten nun nach Artikel 102 (14)

$$r(r-1) \cdots (r-n+1) + [xp_1(x)]_{x=\infty} r(r-1) \cdots (r-n+2).$$

Da aber nach (20)

$$[xp_1(x)]_{x=\infty} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho$$

ist, so erhalten wir als Summe der n Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung

$$(22) \quad \sum_{k=1}^{k=n} r_{\infty k} \equiv \frac{n(n-1)}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho).$$

Aus (21) und (22) folgt also

$$\sum_{i,k} r_{ik} - \sum_k r_{\infty k} \equiv (\varrho - 1) \frac{n(n-1)}{2},$$

d. h. die Differenz zwischen der Summe der ϱn Wurzeln der zu den endlichen singulären Stellen gehörigen determinierenden Gleichungen und

der Summe der n Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung hat den nur von n und ρ abhängigen ganzzahligen Wert

$$(\rho - 1)^{n(n-1)/2}.$$

110. Differentialgleichungen, die nur algebraische Integrale besitzen. Um die Wichtigkeit der Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse in functionentheoretischer Hinsicht noch besonders hervorzuheben, wollen wir zeigen, dass die linearen homogenen Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten, deren sämtliche Integrale algebraische Functionen sind, in jener Klasse enthalten sind.

Eine algebraische Function y von x besitzt nur eine endliche Anzahl von singulären Stellen und, wenn $x = 0$ eine solche ist, so ist in der Umgebung von $x = 0$ y in der Form

$$(23) \quad y = \sum_{(k)}^k c_k x^\mu \quad (k = \alpha, \alpha + 1, \dots)$$

darstellbar, wo μ eine positive ganze Zahl, α eine positive oder negative ganze Zahl oder Null ist, während in der Umgebung jeder nicht singulären Stelle die einzelnen Zweige von y als gewöhnliche Potenzreihen darstellbar sind¹⁾. Genügt nun (23) einer linearen homogenen Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten, so müssen dieser (s. Art. 5) die einzelnen Reihen genügen, in welche man (23) zerlegen kann, sodass jede nur Potenzen von x enthält, deren Exponenten um ganze Zahlen von einander verschieden sind. Diese Reihen

$$y_1 = \sum_{(k)}^k c_k x^\mu \quad (k = \alpha, \alpha + \mu, \alpha + 2\mu, \dots)$$

$$y_2 = \sum_{(k)}^k c_k x^\mu \quad (k = \alpha + 1, \alpha + 1 + \mu, \alpha + 1 + 2\mu, \dots)$$

u. s. w.,

wo $y_1 + y_2 + \dots = y$, verhalten sich aber bei $x = 0$ bestimmt. Analoges gilt von $x = \infty$. Die Integrale der nur algebraisch integrierbaren Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten haben also nur Stellen der Bestimmtheit, d. h.

Lineare homogene Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten;

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. S. 142. — Die Abweichung des obigen von dem dortigen Satz rührt von der abweichenden Definition der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichung her (s. Art. 102).

2) Vergl. z. B. Briot et Bouquet, Th. d. f. ell. 2^{me} éd. S.

deren sämtliche Integrale algebraische Functionen sind, gehören der Fuchs'schen Klasse an¹⁾.

Wir können leicht noch einige weitere Eigenschaften dieser Differentialgleichungen aufstellen:

1) Keine der zu einem endlichen singulären Punkt oder zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Gleichungen darf mehrfache Wurzeln besitzen, und bei jeder Wurzelgruppe müssen die Bedingungen des Kap. II, dass zu jeder Wurzel ein Integral erster Stufe gehört, erfüllt sein;

2) die sämtlichen Wurzeln aller determinierenden Gleichungen müssen rationale Zahlen sein.

Sobald nämlich Logarithmen oder irrationale Anfangspotenzen bei den Integralen auftreten, wären diese ja nicht algebraische Functionen.

Da ferner eine algebraische Function bei beliebigen Umläufen ihrer unabhängigen Variablen nur eine endliche Anzahl von Werten annimmt, so muss die Gruppe der Differentialgleichung, welche nur algebraische Integrale besitzt, eine endliche sein (s. Art. 44):

Lineare homogene Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse, welche nur algebraische Integrale besitzen, haben eine endliche Gruppe.

Dieser Satz lässt sich aber auch umkehren²⁾. Wir setzen also jetzt voraus, die Differentialgleichung

$$(24) \quad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

gehöre in die Fuchs'sche Klasse und besitze eine endliche Gruppe. Ist dann

$$y = \eta_1$$

ein beliebiges Integral derselben, so geht dieses bei allen möglichen Umläufen von x nur in eine endliche Anzahl von Zweigen über, die wir durch

$$\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_m$$

bezeichnen wollen. Die symmetrischen Functionen derselben

$$A_1 = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_m$$

$$A_2 = \eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \dots + \eta_{m-1} \eta_m$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_m = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_m$$

sind daher in der ganzen x -Ebene eindeutige Functionen und haben, da $\eta_1 \dots \eta_m$ sich überall bestimmt verhalten, nur ausserwesentlich

1) Vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 66. S. 158 und Jahresbericht der städt. Gewerbeschule zu Berlin 1865, S. 31 ff.

2) Vergl. Koenigsberger, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig, 1889, S. 478, 479.

singuläre Stellen. Die $A_1 A_2 \dots A_m$ sind daher rationale Functionen von x^1). $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_m$ sind aber die Wurzeln der Gleichung

$$(25) \quad \eta^m - A_1 \eta^{m-1} + \dots + (-1)^m A_m = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, d. h. $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_m$ sind algebraische Functionen von x . Hiermit ist die Umkehrung jenes Satzes bewiesen, und wir können nunmehr sagen:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine lineare homogene Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten nur algebraische Integrale besitzt, bestehen darin, dass dieselbe der Fuchs'schen Klasse angehört und eine endliche Gruppe hat²⁾.

111. Transformation der Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse³⁾. Die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche der Fuchs'schen Klasse angehört, lautet nach (19)

$$(26) \quad \psi(x)^2 y'' + \psi(x) g_{q-1}(x) y' + g_{2q-2}(x) y = 0,$$

wenn

$$\psi(x) \equiv (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_q).$$

Die zu $x = a_i$ gehörige determinierende Gleichung ist also

$$(27) \quad r(r-1) + \frac{g_{q-1}(a_i)}{\psi'(a_i)} r + \frac{g_{2q-2}(a_i)}{\psi'(a_i)^2} = 0,$$

wo

$$\psi'(a_i) \equiv \left[\frac{d\psi(x)}{dx} \right]_{x=a_i};$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \left[\frac{(x - a_i) g_{q-1}(x)}{\psi(x)} \right]_{x=a_i} &\equiv \frac{g_{q-1}(a_i)}{\psi'(a_i)}, \\ \left[\frac{(x - a_i)^2 g_{2q-2}(x)}{\psi(x)^2} \right]_{x=a_i} &\equiv \frac{g_{2q-2}(a_i)}{\psi'(a_i)^2}. \end{aligned}$$

Gleichung (27) besitzt also dann und nur dann die Wurzel $r = 0$, wenn $g_{2q-2}(x)$ durch $(x - a_i)$ teilbar ist. Ist aber das Letztere der Fall, so ist $x - a_i$ ein Teiler aller drei Coefficienten von (26) und kann daher fortgelassen werden. Gesetzt, es wäre für jeden Wert von i mindestens eine Wurzel der determinierenden Gleichung Null, so

1) Vergl. Art. 104. Schluss.

2) Bezüglich des weiteren Studiums der linearen Differentialgleichungen mit nur algebraischen Integralen vergl. Fuchs, Crelles Journ. Bd. 81. (1876) S. 97 ff. und Bd. 85. (1878). S. 1 ff.

3) Diese Transformation hat Fuchs in seinen Universitätsvorlesungen angeführt. Vergl. die In.-Diss. des Verf., Berlin, 1886, S. 5 ff.

könnte man also die ganze Gleichung (26) durch $\psi(x)$ dividieren und hätte

$$(26^a) \quad \psi(x)y'' + g_{\varrho-1}(x)y' + \frac{g_{2\varrho-2}(x)}{\psi(x)}y = 0,$$

wo die Coefficienten von y'' , y' , y ganze Functionen von x sind, deren Grad bezw. $= \varrho$, $< \varrho - 1$, $< \varrho - 2$.

Hat aber nicht jede der Gleichungen (27) ($i = 1, 2, \dots, \varrho$) mindestens eine Wurzel $= 0$, so können wir doch durch eine einfache Transformation die Gleichung (26) in die Gestalt (26^a) bringen. Bezeichnet man nämlich mit r_i eine Wurzel der Gleichung (27), so setzen wir in (26)

$$(28) \quad y = (x - a_1)^{r_1} (x - a_2)^{r_2} \dots (x - a_\varrho)^{r_\varrho} u \equiv \prod_{i=1}^{i=\varrho} (x - a_i)^{r_i} u,$$

wo also in $\Pi(x - a_i)^{r_i}$ diejenigen Faktoren gar nicht auftreten, bei denen für r_i der Wert Null genommen werden kann. Nach (28) ist

$$\begin{aligned} y' &= \Pi u' + \Pi \sum_{i=1}^{i=\varrho} \frac{r_i}{x - a_i} u \\ y'' &= \Pi u'' + 2\Pi \sum_i \frac{r_i}{x - a_i} u' \\ &\quad + \Pi \left(\sum_i \frac{r_i(r_i - 1)}{(x - a_i)^2} + \sum_{i \neq k} \frac{r_i r_k}{(x - a_i)(x - a_k)} \right) u, \end{aligned}$$

und die Gleichung für u wird daher nach Division durch Π

$$\begin{aligned} (29) \quad &\psi^2 u'' \\ &+ \left[2\psi^2 \sum_i \frac{r_i}{x - a_i} + \psi g_{\varrho-1} \right] u' \\ &+ \left[\psi^2 \left(\sum_i \frac{r_i(r_i - 1)}{(x - a_i)^2} + \sum_{i,k} \frac{r_i r_k}{(x - a_i)(x - a_k)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \psi g_{\varrho-1} \sum_i \frac{r_i}{x - a_i} + g_{2\varrho-2} \right] u = 0. \end{aligned}$$

Die Coefficienten von u'' und u' sind durch ψ teilbar, sodass ganze Functionen ϱ^{ten} , bezw. $< (\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Grades übrig bleiben. Auch der Coefficient von u ist aber durch ψ teilbar, sodass eine ganze Function $< (\varrho - 2)^{\text{ten}}$ Grades übrig bleibt. Da nämlich der Gleichung (29) nach (28) die durch Π dividirten Integrale von (26) genügen, so hat die zu $x = a_i$ gehörige determinierende Gleichung von (29) für jeden Wert von i ($i = 1, 2, \dots, \varrho$) die Wurzel Null; folglich ist der Coefficient von u nach der im Anschluss an (26) und (27) gemachten

Bemerkung durch ψ teilbar. Der Quotient ist eine ganze Function von x , deren Grad $\leq \varrho - 2$. Wir können daher sagen:

Wenn die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse nicht in der Gestalt

$$(30) \quad \psi(x)y'' + \varphi_{\varrho-1}(x)y' + \varphi_{\varrho-2}(x)y = 0$$

vorliegt, so kann sie durch die Transformation (28) jedenfalls in dieselbe gebracht werden, wo ψ eine ganze Function ϱ^{ten} Grades mit lauter verschiedenen Linearteilern, $\varphi_{\varrho-1}$ und $\varphi_{\varrho-2}$ ganze Functionen von x sind, deren Grade bezw. $\leq \varrho - 1$, $\varrho - 2$ sind.

Dass diese Transformierbarkeit den Differentialgleichungen zweiter Ordnung *eigenthümlich* ist, ergibt sich daraus, dass die der Gleichung (30) entsprechende Gleichung n^{ter} Ordnung

$$(31) \quad \psi y^{(n)} + \varphi_{\varrho-1} y^{(n-1)} + \varphi_{\varrho-2} y^{(n-2)} + \dots + \varphi_{\varrho-n} y = 0^{(1)},$$

wo die φ ganze Functionen höchstens vom Grade ihres Index und, falls dieser negativ, identisch Null sind, bei $x = a_i$ die determinierende Gleichung

$$(32) \quad r(r-1)\dots(r-n+1) + \frac{\varphi_{\varrho-1}(a_i)}{\psi'(a_i)} r(r-1)\dots(r-n+2) = 0$$

mit den Wurzeln

$$0, 1, \dots, n-2, n-1 - \frac{\varphi_{\varrho-1}(a_i)}{\psi'(a_i)}$$

besitzt. Die letztere Eigenschaft ist aber offenbar durch eine Transformation wie (28) nicht zu erreichen, wenn die Wurzeln vorher beliebige Werte hatten.

112. Die Gauss'sche Differentialgleichung. Nach dem Ergebnis des vorangehenden Artikels können wir die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse mit zwei endlichen singulären Punkten in der Form

$$(33) \quad (x - a_1)(x - a_2)y'' + (b_0 + b_1x)y' + c_0y = 0$$

annehmen, wenn wir uns nötigenfalls die Transformation (28) schon ausgeführt denken. Durch eine weitere Transformation der *unabhängigen* Variablen können wir dabei die beiden endlichen singulären Stellen nach den Punkten 0 und 1 verlegen. Wir setzen

$$(34) \quad x - a_1 = (a_2 - a_1)z,$$

sodass

$$x - a_2 = (a_2 - a_1)(z - 1),$$

1) Pochhammer bezeichnet die singulären Punkte dieser Differentialgleichung als *einfache*. Vergl. Crelles Journ. Bd. 73 (1871). S. 69.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{1}{a_2 - a_1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} \frac{1}{(a_2 - a_1)^2}$$

und die Differentialgleichung (33) in

$$(35) \quad z(z-1) \frac{d^2y}{dz^2} + \left[\frac{b_0 + a_1 b_1}{a_2 - a_1} + b_1 z \right] \frac{dy}{dz} + c_0 y = 0$$

übergeht, oder wenn wir noch

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{b_0 + a_1 b_1}{a_1 - a_2} \equiv \gamma \\ b_1 \equiv \alpha + \beta + 1 \\ c_0 \equiv \alpha \beta \end{cases}$$

setzen, in

$$(37) \quad z(z-1) \frac{d^2y}{dz^2} - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] \frac{dy}{dz} + \alpha \beta y = 0,$$

d. h. in die Gauss'sche Differentialgleichung. Wir können daher sagen:

Die Gauss'sche Differentialgleichung

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha \beta y = 0$$

repräsentiert die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse mit zwei endlichen singulären Stellen, insofern als die allgemeinste Gleichung der bezeichneten Art durch die Transformationen (28), (34), (36) in jene übergeführt werden kann.

Diese Bedeutung der Gauss'schen Differentialgleichung möge es rechtfertigen, wenn wir endlich im nächsten Artikel die in Bezug auf dieselbe im Lauf der Untersuchung gewonnenen Resultate noch einmal zusammenstellen und bei jedem der drei singulären Punkte 0, 1, ∞ das in seiner Umgebung gültige Fundamentalsystem angeben.

113. Die Integrale der Gauss'schen Differentialgleichung. Die Gauss'sche Differentialgleichung

$$(38) \quad x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha \beta y = 0$$

hat die drei singulären Stellen 0, 1, ∞ , welche sämtlich Stellen der Bestimmtheit sind.

1) *Die singuläre Stelle $x=0$.* Die Wurzeln der determinierenden Gleichung sind 0, $1-\gamma$ (s. Art. 10).

a) Sind beide nicht um eine ganze Zahl verschieden oder gehört trotzdem zu beiden ein Integral erster Stufe (s. Art. 18), so lauten diese, ein Fundamentalsystem bildenden Integrale (s. Art. 23)

$$(39^a) \quad \begin{cases} y_{00} \equiv F(\alpha, \beta, \gamma; x) \\ y_{0, 1-\gamma} \equiv x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x). \end{cases}$$

b) Ist γ eine positive ganze Zahl und, falls $\gamma > 1$, keine der Grössen α, β gleich einer der Zahlen $1, 2, \dots, \gamma - 1$ (s. Art. 18), gehört zu der Wurzel 0 ein Integral erster Stufe

$$y_{00} \equiv I(\alpha, \beta, \gamma; x),$$

zu $1 - \gamma$ aber ein Integral zweiter Stufe

$$y_{0,1-\gamma} \equiv \sum_{(k=1-\gamma, 2-\gamma, \dots)} c'_k x^k + I(\alpha, \beta, \gamma; x) \log x.$$

Zur Berechnung von dessen logarithmenfreiem Teil leiten wir nach Art. 59 (indem wir den dort benutzten Buchstaben α durch α ersetzen) aus

$$I'_{k\alpha} = \alpha_{k,k-1} c_{k-1} + \alpha_{kk} c_k \\ \equiv - (k + \alpha - 1)(k + \beta - 1) c_{k-1} + k(k + \gamma - 1) c_k = 0$$

(s. Art. 10) die Recursionsformel her

$$(40) \quad I'_{k\alpha} \equiv a'_{k,k-1} c_{k-1} + a'_{kk} c_k + \alpha_{k,k-1} c'_{k-1} + \alpha_{kk} c'_k \\ \equiv - (2k + \alpha + \beta - 2) c_{k-1} + (2k + \gamma - 1) c_k \\ - (k + \alpha - 1)(k + \beta - 1) c'_{k-1} + k(k + \gamma - 1) c'_k = 0,$$

worin die c die Coefficienten von $I(\alpha, \beta, \gamma; x)$ sind, also

$$c_{1-\gamma} \equiv c_{2-\gamma} \equiv \dots \equiv c_{-1} \equiv 0, \quad c_0 \equiv 1$$

ist. Demnach ergibt Formel (40), für $k = 2 - \gamma, 3 - \gamma, \dots, -1$, gebildet,

$$c'_{-1} \equiv \frac{\gamma - 1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \\ c'_{-2} \equiv - \frac{(\gamma - 1)(\gamma - 2) \cdot 1!}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\beta - 1)(\beta - 2)} \\ \dots \dots \dots \\ c'_{1-\gamma} \equiv \frac{(-1)^\gamma (\gamma - 1)! (\gamma - 2)!}{(\alpha - 1) \dots (\alpha - \gamma + 1)(\beta - 1) \dots (\beta - \gamma + 1)}.$$

während wir den willkürlich bleibenden Coefficienten $c'_0 \equiv 0$ setzen. Nach Artikel 63 Formel (26) bilden wir dann

$$C_a(a) \equiv \frac{(-1)^\gamma (\gamma - 1)! (\gamma - 2)!}{(\alpha - 1) \dots (\alpha - \gamma + 1)(\beta - 1) \dots (\beta - \gamma + 1)} (a - 1 + \gamma) \\ \dots \dots \dots$$

$$C_{a+\gamma-2}(a) \equiv \frac{(\gamma - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} (a - 1 + \gamma)$$

$$C_{a+\gamma-1}(a) \equiv 1$$

und weiter mittelst der Recursionsformel

$$\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma$$

getreten sind. Dann trifft aber bei der jetzigen Annahme über γ für die Gauss'sche Differentialgleichung in u der vorher behandelte Fall b) zu. Wir können daher aus (39^b) auch das Integral zweiter Stufe für diese Gleichung in u sofort ablesen und erhalten so als Fundamentalsystem der vorgelegten Gleichung (38) in dem Falle c)

$$(39^c) \quad \begin{cases} y_{0, 1-\gamma} = x^{1-\gamma} I'(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x) \\ y_{00} = x^{1-\gamma} I_1'(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x) \\ \quad + x^{1-\gamma} I'(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x) \log x. \end{cases}$$

Hierbei convergieren alle sechs Reihen, die in den Formeln (39^a), (39^b), (39^c) auftreten, innerhalb des Kreises um $x = 0$ mit dem Radius 1.

2) Die *singuläre Stelle* $x = 1$. Die Wurzeln der zugehörigen determinierenden Gleichung sind 0, $\gamma - \alpha - \beta$ (s. Art. 10). Wir können die Untersuchung am einfachsten auf die vorhergehende bei $x = 0$ zurückführen, indem wir in (38)

$$1 - x = x'$$

substituieren. Dadurch resultiert wieder eine Gauss'sche Differentialgleichung zwischen y und x' (s. Art. 10), in welcher an Stelle von α, β, γ bezw. die Grössen

$$\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma$$

getreten sind. Demnach ergeben sich die folgenden drei Gestalten des zu $x = 1$ gehörigen Fundamentalsystems für die drei Fälle, über deren Eintreten nach Art. 18 zu entscheiden ist, indem man die dortigen Bedingungen für die Grössen $\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma$ bildet:

a) wenn zu 0 und $\gamma - \alpha - \beta$ ein Integral erster Stufe gehört (s. auch Art. 23)

$$(43^a) \quad \begin{cases} y_{10} = I'(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - x) \\ y_{1, \gamma - \alpha - \beta} = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} I'(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - x), \end{cases}$$

b) wenn zu 0 ein Integral erster, zu $\gamma - \alpha - \beta$ ein solches zweiter Stufe gehört,

$$(43^b) \quad \begin{cases} y_{10} = I'(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - x) \\ y_{1, \gamma - \alpha - \beta} = I_1'(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - x) \\ \quad + I'(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - x) \log(1 - x), \end{cases}$$

c) wenn zu $\gamma - \alpha - \beta$ ein Integral erster, und zu Null ein Integral zweiter Stufe gehört,

$$(43^c) \quad \begin{cases} y_{1, \gamma-\alpha-\beta} \equiv (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1; 1-x) \\ y_{10} \equiv (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F_1(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1; 1-x) \\ \quad + (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1; 1-x) \log(1-x), \end{cases}$$

wobei alle sechs in den Formeln (43^a), (43^b), (43^c) auftretenden Reihen innerhalb des Kreises um $x=1$ mit dem Radius 1 convergieren.

3) Die singuläre Stelle $x = \infty$. Die Wurzeln der zugehörigen determinierenden Gleichung sind $-\alpha$, $-\beta$ (s. Art. 107). Die Untersuchung wird wieder am einfachsten auf die unter 1) angestellte zurückgeführt, wenn wir in (38) substituieren

$$(44) \quad x = \frac{1}{z}, \quad y = z^\alpha u,$$

wodurch zwischen der unabhängigen Variablen z und der abhängigen u eine Gauss'sche Differentialgleichung hervorgeht, in der α , β , γ bezw. durch

$$\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1$$

ersetzt sind. Daher lautet das in der Umgebung von $x = \infty$ gültige Fundamentalsystem

a) wenn zu beiden Wurzeln $-\alpha$, $-\beta$ ein Integral erster Stufe gehört, (s. auch Art. 107)

$$(45^a) \quad \begin{cases} y_{\infty, -\alpha} \equiv x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{x}\right) \\ y_{\infty, -\beta} \equiv x^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{x}\right), \end{cases}$$

b) wenn zu $-\alpha$ ein Integral erster Stufe, zu $-\beta$ ein solches zweiter Stufe gehört,

$$(45^b) \quad \begin{cases} y_{\infty, -\alpha} \equiv x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{x}\right) \\ y_{\infty, -\beta} \equiv x^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{x}\right) \\ \quad + x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x}, \end{cases}$$

c) wenn zu $-\beta$ ein Integral erster, zu $-\alpha$ ein solches zweiter Stufe gehört,

$$(45^c) \quad \begin{cases} y_{\infty, -\beta} \equiv x^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{x}\right) \\ y_{\infty, -\alpha} \equiv x^{-\beta} F_1\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{x}\right) \\ \quad + x^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x}, \end{cases}$$

wo sämtliche sechs in den Formeln (45^a), (45^b), (45^c) auftretenden Reihen *ausserhalb* des Kreises um $x = 0$ mit dem Radius 1 convergieren.

Unsere Methoden haben also gestattet, für die Integrale der Gauss'schen Differentialgleichung bei den singulären Stellen mittelst der beiden Reihenalgorithmien I' und I'_1 in jedem Falle einen expliziten Ausdruck anzugeben.

Anhang.

Hilfssätze.

Zu Kapitel IV.

Satz 1: Sind $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ irgend welche λ Functionen der Variablen x , so ist die Determinante derselben

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_1' & \dots & u_1^{(\lambda-1)} \\ u_2 & u_2' & \dots & u_2^{(\lambda-1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_\lambda & u_\lambda' & \dots & u_\lambda^{(\lambda-1)} \end{vmatrix}$$

dann und nur dann identisch Null, wenn $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ linear abhängig sind¹⁾.

Beweis: Dass D für jeden Wert von x verschwindet, wenn zwischen $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ eine lineare homogene Relation mit von x unabhängigen Coefficienten besteht, folgt ohne Weiteres aus den Elementen der Determinantentheorie, da alsdann auch zwischen den ersten, zweiten, u. s. w., $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Ableitungen von $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ immer dieselbe Relation besteht.

Zum Beweis der Umkehrung gehen wir von der Annahme aus, dass D identisch Null ist, und bezeichnen die Adjuncten der Elemente in der letzten Colonne von D bezw. mit

$$A_1, A_2, \dots, A_\lambda.$$

Dann hat man das System der Identitäten

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 u_1 & + A_2 u_2 & + \dots + A_\lambda u_\lambda & \equiv 0 \\ A_1 u_1' & + A_2 u_2' & + \dots + A_\lambda u_\lambda' & \equiv 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_1 u_1^{(\lambda-2)} & + A_2 u_2^{(\lambda-2)} & + \dots + A_\lambda u_\lambda^{(\lambda-2)} & \equiv 0 \\ A_1 u_1^{(\lambda-1)} & + A_2 u_2^{(\lambda-1)} & + \dots + A_\lambda u_\lambda^{(\lambda-1)} & \equiv 0, \end{cases}$$

1) Vergl. Christoffel, Crelles Journ. Bd. 55. (1858). S. 293.

Frobenius, „ „ „ 76. (1873). S. 237, 77. (1874). S. 246.

Parrh, „ „ „ 80. (1875). S. 177.

Tannery, Annales de l'école normale, 2^{me} série, 4. (1875). S. 121.

von denen die $\lambda - 1$ ersten dadurch entstehen, dass die Elemente einer Colonne von D mit den Adjuncten der Elemente einer andern Colonne componiert werden, während die letzte eine Folge des identischen Verschwindens von D ist. Durch Differentiation der $\lambda - 1$ ersten Identitäten in (1) nach x und jedesmalige Subtraktion der nächstfolgenden Identität ergibt sich, wenn

$$\frac{dA_i}{dx} - A'_i \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda)$$

gesetzt wird,

$$(2) \quad \begin{cases} A'_1 u_1 + A'_2 u_2 + \dots + A'_\lambda u_\lambda & 0 \\ A'_1 u'_1 + A'_2 u'_2 + \dots + A'_\lambda u'_\lambda & 0 \\ \cdot & \cdot \\ A'_1 u_1^{(\lambda-2)} + A'_2 u_2^{(\lambda-2)} + \dots + A'_\lambda u_\lambda^{(\lambda-2)} & 0. \end{cases}$$

Sieht man also von der letzten Identität in (1) ab, so zeigt sich, dass die λ Grössen A und die λ Grössen A' denselben $\lambda - 1$ linearen homogenen Gleichungen genügen; hieraus folgt

$$(3) \quad A_1 : A_2 : \dots : A_\lambda = A'_1 : A'_2 : \dots : A'_\lambda.$$

Nun wollen wir zunächst voraussetzen, dass keine der Grössen $A_1 A_2 \dots A_\lambda$ identisch Null, und dürfen dann annehmen, dass mindestens eine der Grössen $A'_1 A'_2 \dots A'_\lambda$ nicht identisch Null ist. Wären nämlich die letzteren sämtlich identisch Null, so wären ja alle $A_1 A_2 \dots A_\lambda$ von x unabhängig und das Bestehen einer linearen Abhängigkeit zwischen $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ wäre durch die erste der Identitäten (1) erwiesen. Sei also etwa A'_λ nicht identisch Null; dann liefert (3) die Gleichungen

$$\frac{A_i}{A_\lambda} = \frac{A'_i}{A'_\lambda} \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda - 1)$$

oder

$$\frac{A_i A'_\lambda - A_\lambda A'_i}{A_\lambda A'_\lambda} = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{A_i}{A_\lambda} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda - 1);$$

d. h. die Quotienten $\frac{A_i}{A_\lambda}$ sind von x unabhängig. Dividiert man also die erste der Identitäten (1) durch A_λ , so stellt

$$(4) \quad \frac{A_1}{A_\lambda} u_1 + \frac{A_2}{A_\lambda} u_2 + \dots + \frac{A_{\lambda-1}}{A_\lambda} u_{\lambda-1} + u_\lambda = 0$$

eine lineare Abhängigkeit zwischen $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ dar.

Ist nun eine der Determinanten $A_1 A_2 \dots A_\lambda$ identisch Null, was bisher ausgeschlossen wurde, so knüpft sich an das Verschwinden dieser Determinante, da sie aus $\lambda - 1$ der Functionen $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ geradeso gebildet ist, wie D aus allen $u_1 \dots u_\lambda$, genau dieselbe Discussion. Man findet daher in diesem Fall entweder eine lineare Abhängigkeit zwischen $\lambda - 1$ Functionen u , oder es ist wiederum eine der in Frage kommenden Unterdeterminanten Null, u. s. w. Da man aber auf diese Weise schliesslich zu den Determinanten zweiten Grades

$$\begin{vmatrix} u_i & u_i' \\ u_k & u_k' \end{vmatrix}$$

herabsteigt, bei denen die Adjuncten der letzten Colonne je zwei der Functionen $u_1 \dots u_\lambda$ selbst und daher sicher nicht identisch Null sind, so gelangt man spätestens bei diesen Determinanten dahin, dass die oben gemachte Voraussetzung thatsächlich erfüllt ist. In diesem äussersten Falle würde also schon zwischen irgend zweien der Functionen $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ eine lineare Abhängigkeit bestehen.

Hiermit ist der Satz ganz allgemein bewiesen.

Satz 2: Sind

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_\lambda(x)$$

λ nach irgend welchen Potenzen von x fortschreitende Reihen von der Beschaffenheit, dass eine jede von ihnen nur solche Potenzen von x enthält, die in keiner der übrigen auftreten, so sind die λ Reihen linear unabhängig.

Bestünde nämlich eine lineare homogene Relation

$$(5) \quad C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + \dots + C_\lambda \psi_\lambda \equiv 0$$

mit von x unabhängigen Coefficienten $C_1, C_2, \dots, C_\lambda$, die für jeden Wert von x erfüllt ist, so müssten die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x auf der linken Seite von (5) gleich Null sein. Ist nun aber etwa x^{a_1} eine in ψ_1 wirklich auftretende Potenz, deren Coefficient a_1 also $\neq 0$ ist, so ist nach der Voraussetzung über die λ Reihen ψ

$$C_1 a_1$$

der vollständige Coefficient von x^{a_1} auf der linken Seite von (5). Damit er verschwindet, muss also

$$C_1 = 0$$

sein. In gleicher Weise ergibt sich das Verschwinden von $C_2 \dots C_\lambda$ und damit die Unmöglichkeit einer Relation (5).

Satz 3: Sind $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\lambda$ λ nach Potenzen von x fortschreitende Reihen, deren sämtliche Exponenten sich nur um ganze Zahlen oder Null von einander unterscheiden, und deren jede mit einem anderen Exponenten beginnt als alle übrigen, so sind sie linear unabhängig.

Beweis: Jede der Reihen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\lambda$ denken wir uns in dem Sinne nach steigenden Potenzen von x geordnet, dass die reellen Teile der Exponenten wachsen. Sind dann $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$ die nach Voraussetzung von einander verschiedenen Anfangsexponenten von bezw. $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\lambda$, so können wir annehmen, dass auch die reellen Teile dieser Zahlen bei der angegebenen Reihenfolge wachsen, r_1 also diejenige von ihnen mit dem kleinsten reellen Teil ist.

Bestände nun eine Relation

$$(6) \quad C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + \dots + C_\lambda \psi_\lambda = 0$$

mit von x unabhängigen Coefficienten, so würde diese wieder das Verschwinden der einzelnen Potenzen von x in (6) erfordern. Die Potenz x^{r_1} kommt aber nur in ψ_1 vor, sodass zunächst $C_1 = 0$ sein muss. Dann wiederholt man aber denselben Schluss in Bezug auf die Reihen $\psi_2, \dots, \psi_\lambda$ u. s. w. und findet so, dass alle $C_1, C_2, \dots, C_\lambda$ in (6) den Wert Null haben müssen, d. h. dass diese Relation unmöglich ist.

Satz 4: Sind $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\lambda$ λ linear unabhängige, sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltende Reihen, in welchen die Exponenten sämtlicher Potenzen von x sich nur um ganze Zahlen oder Null unterscheiden, so kann man λ lineare homogene Verbindungen derselben bilden, die wieder linear unabhängig sind und lauter verschiedene Anfangsexponenten besitzen.

Beweis: Die Reihen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\lambda$ seien in dieser Reihenfolge so geordnet, dass die reellen Teile der Anfangsexponenten nicht abnehmen. Keine der Reihen hat also einen Anfangsexponent mit kleinerem reellen Teil als ψ_1 . Sind aber etwa die Anfangsexponenten von $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{\gamma-1}$ gleich dem von ψ_1 , den wir r_1 nennen wollen, während derjenige von ψ_γ einen grösseren reellen Teil hat, so kann man die Constanten $a_2, a_3, \dots, a_{\gamma-1}$ derart wählen, dass

$$\psi_2 = a_2 \psi_1, \quad \psi_3 = a_3 \psi_1, \quad \dots, \quad \psi_{\gamma-1} = a_{\gamma-1} \psi_1$$

nicht mehr zu r_1 , sondern zu einem Exponenten mit grösserem reellen Teil gehören. Betrachten wir nun statt der ursprünglichen die λ Reihen

$$(7) \quad \psi_1, \psi_2 = a_2 \psi_1, \dots, \psi_{\gamma-1} = a_{\gamma-1} \psi_1, \psi_\gamma, \dots, \psi_\lambda,$$

so haben diese schon die Eigenschaft, dass nur noch ψ_1 zu dem Exponenten r_1 mit kleinstem reellen Teil gehört. Sie sind aber wiederum linear unabhängig; denn die Determinante dieser λ Functionen ist (s. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. 5. Aufl. § 6. 1) als Produkt zweier

Faktoren darstellbar, deren einer die von Null verschiedene Determinante der λ linear unabhängigen Functionen $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_\lambda$, deren anderer die Determinante der Substitutionscoefficienten ist, vermöge deren sich die Functionen (7) durch die $\psi_1 \dots \psi_\lambda$ ausdrücken, welche den Wert 1 hat.

Wiederholt man dieselbe Operation in Bezug auf die $\lambda - 1$ Functionen

$$\psi_2 - a_2 \psi_1, \dots, \psi_{\gamma-1} - a_{\gamma-1} \psi_1, \psi_\gamma, \dots, \psi_\lambda,$$

so trennt man wieder eine Reihe ab, die zu einem Exponenten r_2 gehört, dessen reeller Teil grösser als der von r_1 , aber kleiner als bei den $\lambda - 2$ übrigen Reihen ist, und die λ jetzt an Stelle von $\psi_1 \dots \psi_\lambda$ gesetzten Reihen sind wiederum linear unabhängig. U. s. w. Endlich gelangt man so zu λ linear unabhängigen Reihen

$$\mathfrak{P}_1 (\equiv \psi_1), \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\lambda,$$

die lineare homogene Verbindungen von $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_\lambda$, wie diese linear unabhängig sind und bezw. zu λ von einander verschiedenen Exponenten

$$r_1 r_2 \dots r_\lambda$$

gehören.

Satz 5: Eine ganze rationale Function von $\log x$, deren Coefficienten — abgesehen höchstens von einem ihnen allen gemeinsamen Faktor x^r — in einem Kreis oder Kreisring mit dem Mittelpunkt $x = 0$ eindeutig sind, verschwindet identisch nur dann, wenn die einzelnen Coefficienten der Potenzen von $\log x$ identisch verschwinden.

Beweis: Wenn

$$(8) \quad y = \psi_0 + \psi_1 \log x + \psi_2 \log^2 x + \dots + \psi_\sigma \log^\sigma x \equiv 0,$$

wo die Functionen $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_\sigma$, abgesehen von dem ihnen allen gemeinsamen Faktor x^r , in dem gedachten Gebiet eindeutig sind, so ist auch die aus y entstehende Function, wenn x einen Umlauf um $x = 0$ beschreibt, die wir mit \bar{y} bezeichnen, identisch Null. Berücksichtigt man (vergl. Art. 51), dass bei diesem Umlauf jede der Functionen ψ sich nur mit dem Faktor

$$\omega = e^{2\pi r \pi i}$$

multipliziert, $\log x$ aber um $2\pi i$ vermehrt, so erhält man für \bar{y} einen Ausdruck (vergl. Art. 51 (11) und 56 (5) und (6)), dem man am einfachsten die Gestalt giebt

$$(9) \quad y = \omega \left[y + \frac{2\pi i}{1} \frac{\partial y}{\partial \log x} + \dots + \frac{(2\pi i)^\sigma}{\sigma!} \frac{\partial^\sigma y}{(\partial \log x)^\sigma} \right].$$

Nach der vorausgesetzten Identität (8) ist also auch

Eins erniedrigt. Nimmt man also mit (13) die analoge Operation vor und wiederholt das Verfahren im Ganzen σ_1 -mal, so wird die von u_1 herrührende Zeile in dem entstehenden Ausdruck, der identisch Null ist, ganz verschwunden sein, während der Grad der übrigen Zeilen in $\log x$ derselbe geblieben ist wie in den entsprechenden u und die höchste Potenz von $\log x$ in jeder dieser Zeilen, abgesehen von einem von Null verschiedenen constanten Faktor, immer noch mit derselben Function ψ wie dort multipliciert ist.

In gleicher Weise reduciren wir den Ausdruck weiter, indem wir auch die von $u_2, u_3, \dots, u_{\lambda-1}$ herrührenden Teile ganz zum Wegfall bringen und endlich den Grad des aus u_λ herrührenden Teiles in $\log x$ von σ_λ auf 0 erniedrigen. Dann ergibt sich also das identische Verschwinden der mit einer von Null verschiedenen Constanten multiplicierten Function $\psi_{\lambda\sigma_\lambda}$, d. h.

$$\psi_{\lambda\sigma_\lambda} \equiv 0.$$

Ebenso folgt nun natürlich das identische Verschwinden sämtlicher anderen ψ_λ , dann sämtlicher $\psi_{\lambda-1}$, u. s. w., endlich sämtlicher ψ_1 und zwar das der letzteren sämtlich gleichzeitig, da ja, wenn erst die Identität

$$y_1 \equiv u_1 \equiv 0$$

erwiesen ist, Satz 5 zur Anwendung gelangt.

Unmittelbare Folgerungen des hiermit bewiesenen Satzes 6 sind wieder die Sätze:

Functionen $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ von der in Satz 6 angegebenen Art sind linear unabhängig.

Sind $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ Functionen der in Satz 6 angegebenen Art, bei denen jedoch die Zahlen $r_1 r_2 \dots r_\lambda$ sich derart in mehrere Gruppen sondern, dass die Zahlen derselben Gruppe sich nur um ganze Zahlen oder Null von einander unterscheiden, so zerfällt eine lineare homogene Relation zwischen $u_1 u_2 \dots u_\lambda$ in mehrere solche, deren jede nur die zu den Zahlen r ein und derselben Gruppe gehörigen Functionen u enthält.

Zu Kapitel V.

Wenn die Determinante

$$(1) \quad D \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

den Wert Null hat, so genügen die Elemente jeder Zeile (und ebenso die jeder Colonne) ein und derselben linearen homogenen Relation

$$(2) \quad \begin{cases} C_1 a_{11} + C_2 a_{12} + \cdots + C_n a_{1n} = 0 \\ C_1 a_{21} + C_2 a_{22} + \cdots + C_n a_{2n} = 0 \\ \vdots \\ C_1 a_{n1} + C_2 a_{n2} + \cdots + C_n a_{nn} = 0, \end{cases}$$

in der nicht sämtliche Coefficienten C Null sind.

Fasst man nämlich in den Gleichungen (2) $C_1 C_2 \dots C_n$ als die Unbekannten auf, so liefert das Gleichungssystem (2) für diese ein Wertsystem, bei dem mindestens eine der Grössen C nicht den Wert Null hat, sobald die Determinante des Systems, die ja mit D identisch ist, verschwindet. (Vergl. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. 5. Aufl. Leipzig, 1881, § 8. 2. S. 72 ff.).

Zu Kapitel VII.

Wenn die bei $x = 0$ sich bestimmt verhaltende Function

$$\Psi \equiv \psi_0 + \psi_1 \log x + \cdots + \psi_\sigma \log^\sigma x \quad (\sigma = 0, 1, 2, \dots)$$

zu dem an γ^{ter} Stelle ($\gamma = 1, 2, 3, \dots$) stehenden Exponenten ρ gehört, so verhält sich die Function

$$\int \Psi dx$$

bei $x = 0$ ebenfalls bestimmt und gehört zu dem Exponenten $\rho + 1$, der, wenn $\rho = -1$ ist, an $(\gamma + 1)^{\text{ter}}$, andernfalls an γ^{ter} Stelle steht. Ist ρ eine negative ganze Zahl, so gilt dieser Satz für einen beliebigen Wert der Integrationsconstanten, andernfalls muss dieselbe gleich Null gesetzt werden.

Beweis: Wir beweisen den Satz zunächst für den Specialfall $\sigma = 0$; es sei also

$$(1) \quad \psi \equiv \sum_{(k)} c_k x^k \quad (k = \rho, \rho + 1, \dots)$$

eine zu der beliebigen Zahl ρ gehörige Reihe. Dann ist, wenn wir die Integrationsconstante zunächst fortlassen,

$$(2) \quad \int \psi dx = \sum_{(k)} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + c_{-1} \log x,$$

($k = \rho, \rho + 1, \dots; k \neq -1$)

wo der Coefficient c_{-1} (und folglich $\log x$) nur dann auftreten kann, wenn ρ eine negative ganze Zahl ist, und sicher von Null verschieden ist, wenn ρ den Wert -1 hat. Setzen wir also

$$(2^a) \quad \int \psi dx = \chi + c_{-1} \log x,$$

so gehört die Reihe χ im allgemeinen zu $\varrho + 1$, nur, wenn $\varrho = -1$, zu einem grösseren Exponenten. Die Constante c_{-1} , welche mit $\log x$ multipliciert ist, müssen wir aber als eine zu dem Exponenten 0 gehörige Function bezeichnen. Der Coefficient von $\log x$ in (2^a) gehört daher, falls er nicht identisch Null ist, zu einem Exponenten, der $> \varrho + 1$, und nur, wenn $\varrho = -1$ ist, zu $\varrho + 1$ selbst. Das Integral (2) oder (2^a) gehört folglich stets zu $\varrho + 1$; dieser Exponent steht, wenn $\varrho = -1$, an zweiter, andernfalls immer an erster Stelle. Diese Eigenschaft wird offenbar, falls ϱ eine negative ganze Zahl ist, nicht alteriert, wenn man dem Integral nun noch eine willkürliche Constante c hinzufügt. Diese Constante ersetzt dann nämlich in der Reihe χ das fehlende, von x unabhängige Glied. Hat aber ϱ nicht einen negativen ganzzahligen Wert, so muss die Constante Null sein; andernfalls würde nämlich $c + \chi$, wenn ϱ gleich Null oder einer positiven ganzen Zahl, zu einem kleineren Exponenten als $\varrho + 1$ gehören, und, wenn ϱ überhaupt nicht ganzzahlig wäre, gar nicht mehr eine sich bestimmt verhaltende Reihe im engeren Sinne zu nennen sein, weil sie Potenzen enthielte (z. B. die 0^{te} (c) und $(\varrho + 1)^{\text{te}}$), deren Exponenten sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. — Damit ist der Satz für den Specialfall $\sigma = 0$ vollständig bewiesen.

Bei dem allgemeinen Beweis des Satzes verfolgen wir nur noch den Fall, dass ϱ eine negative ganze Zahl ist, da diese Voraussetzung bei der Anwendung in Artikel 48 und 49 stets zutrifft und im übrigen der Beweis für den entgegengesetzten Fall sich noch erheblich einfacher gestaltet und aus dem hier zu führenden unmittelbar abzulesen ist.

Wir setzen

$$(3) \quad \psi_\lambda \equiv \sum_{\substack{(k) \\ (\lambda = 0, 1, \dots, \sigma)}} c_k^{(\lambda)} x^k \quad (k = \varrho_2, \varrho_2 + 1, \dots),$$

sodass die Reihen $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_\sigma$ in \mathfrak{P} bzw. zu den Exponenten $\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_\sigma$ gehören. Da nach Voraussetzung \mathfrak{P} zu dem an γ^{ter} Stelle stehenden Exponenten ϱ gehört, ist

$$(4) \quad \begin{cases} \varrho_{\gamma-1} \equiv \varrho \\ \varrho_{\gamma-\alpha} \geq \varrho & (\alpha = 2, 3, \dots, \gamma) \\ \varrho_{\gamma+\alpha} > \varrho & (\alpha = 0, 1, \dots, \sigma - \gamma); \end{cases}$$

es ist daher sehr wohl möglich, dass, wenn auch $\varrho \equiv \varrho_{\gamma-1}$ eine negative ganze Zahl ist, ϱ_λ ($\lambda = 0, 1, \dots, \gamma - 2, \gamma, \dots, \sigma$) gleich Null oder einer positiven ganzen Zahl ist.

Nun haben wir die Integrale

$$(5) \quad \int \psi_\lambda \log^\lambda x \, dx \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \sigma)$$

zu bilden; denn dass das für $\lambda = 0$ aus (5) entstehende Integral, wenn die willkürliche Integrationsconstante gleich Null gesetzt wird, stets eine zu $\varrho_0 + 1$ gehörige Function ist, bei welcher dieser Exponent an zweiter oder erster Stelle steht, je nachdem $\varrho_0 = -1$ ist oder einen andern Wert hat, wissen wir bereits aus der vorangehenden Betrachtung. Die Integrationsconstante dürfen wir aber in diesem und in den Integralen (5) gleich Null setzen, wenn wir schliesslich der aus allen diesen Integralen zu bildenden Summe eine willkürliche Constante hinzufügen.

Durch partielle Integration ergibt sich

$$(6) \quad \int \psi_\lambda \log^\lambda x \, dx = \log^\lambda x \int \psi_\lambda \, dx - \int \frac{\lambda}{x} \log^{\lambda-1} x \, dx \int \psi_\lambda \, dx.$$

Nun ist nach (2^a)

$$(7) \quad \int \psi_\lambda \, dx \equiv \chi_\lambda + c_{-1}^{(\lambda)} \log x,$$

wo die willkürliche Constante dieser Integration natürlich gleich Null gesetzt werden darf, da sie sich sonst in der Gleichung (6) doch fort-heben würde. In χ_λ fehlt daher sicher das von x unabhängige Glied, und die Function (7) gehört zu $\varrho_\lambda + 1$, welcher Exponent im allgemeinen an erster und nur dann an zweiter Stelle steht, wenn $\varrho_\lambda = -1$ ist. Demnach wird aus (6)

$$(8) \quad \int \psi_\lambda \log^\lambda x \, dx = \chi_\lambda \log^\lambda x + \frac{c_{-1}^{(\lambda)}}{\lambda+1} \log^{\lambda+1} x - \int \frac{\lambda}{x} \chi_\lambda \log^{\lambda-1} x \, dx,$$

wo die beiden ersten Glieder rechts eine zu der an $(\lambda+1)^{\text{ter}}$, bzw. — wenn $\varrho_\lambda = -1$ — an $(\lambda+2)^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Zahl $\varrho_\lambda + 1$ gehörige Function bilden. Unter dem Integralzeichen aber steht eine Function von derselben Gestalt wie in dem Integral (5), nur ist der Grad in $\log x$ um Eins erniedrigt, während die an Stelle von ψ_λ tretende Reihe

$$\frac{\lambda}{x} \chi_\lambda$$

zu einem Exponenten gehört, der $\geq \varrho_\lambda$, und die Potenz x^{-1} nicht enthält. Nimmt man daher mit diesem Integral dieselbe Umwandlung vor, wie vorher in Formel (8) mit (5), so folgt

$$(9) \quad - \int \frac{\lambda}{x} \chi_\lambda \log^{\lambda-1} x \, dx = \chi_{\lambda 1} \log^{\lambda-1} x - \int \frac{\lambda-1}{x} \chi_{\lambda 1} \log^{\lambda-2} x \, dx,$$

wo $\chi_{\lambda 1}$ zu einem Exponenten gehört, der $\geq \varrho_\lambda + 1$ und kein von x unabhängiges Glied enthält, ein Glied mit $\log^\lambda x$ aber nicht auftritt.

Führt man so fort, so erniedrigt sich also bei jedem Schritt der Grad in $\log x$ unter dem Integralzeichen, und man erhält schliesslich

$$(10) \quad \int \psi_\lambda \log^\lambda x dx = \chi_{\lambda\lambda} + \chi_{\lambda, \lambda-1} \log x + \dots + \chi_{\lambda 1} \log^{\lambda-1} x + \chi_\lambda \log^\lambda x + \frac{c_{-1}^{(\lambda)}}{\lambda+1} \log^{\lambda+1} x,$$

wo $\chi_{\lambda\alpha}$ ($\alpha=1, 2, \dots, \lambda$) zu einem Exponenten gehört, der $\geq \varrho_\lambda + 1$; χ_λ gehört genau zu $\varrho_\lambda + 1$, es sei denn $\varrho_\lambda = -1$, in welchem Falle χ_λ zu einem grösseren Exponenten gehört, wofür aber dann $c_{-1}^{(\lambda)} \neq 0$ ist und eine zu $\varrho_\lambda + 1$ gehörige Function darstellt. Folglich gehört das Integral

$$\int \psi_\lambda \log^\lambda x dx$$

zu $\varrho_\lambda + 1$ und zwar im allgemeinen zu diesem an $(\lambda+1)^{\text{ter}}$, und nur, wenn $\varrho_\lambda = -1$, an $(\lambda+2)^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten. Damit ist unser Satz auch für die einzelnen Integrale (5) bewiesen.

Um nun endlich die gesuchte Function $\int \Psi dx$ herzustellen, müssen wir Gleichung (10) für $\lambda = 0, 1, \dots, \sigma$ bilden und alle diese Gleichungen addieren. Wenn wir also jetzt noch die willkürliche Constante c hinzufügen, so erhalten wir

$$(11) \quad \begin{aligned} & \int \Psi dx \\ & c + \chi_0 + \chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33} + \dots + \chi_{\sigma\sigma} \\ & + \log x \left[c_{-1}^{(0)} + \chi_1 + \chi_{21} + \chi_{32} + \dots + \chi_{\sigma, \sigma-1} \right] \\ & + \dots \\ & + \log^{\gamma-1} x \left[\frac{c_{-1}^{(\gamma-2)}}{\gamma-1} + \chi_{\gamma-1} + \chi_{\gamma 1} + \dots + \chi_{\sigma, \sigma-\gamma+1} \right] \\ & + \log^{\gamma} x \left[\frac{c_{-1}^{(\gamma-1)}}{\gamma} + \chi_\gamma + \dots + \chi_{\sigma, \sigma-\gamma} \right] \\ & + \dots \\ & + \log^{\sigma} x \left[\frac{c_{-1}^{(\sigma-1)}}{\sigma} + \chi_\sigma \right] \\ & + \log^{\sigma+1} x \frac{c_{-1}^{(\sigma)}}{\sigma+1}. \end{aligned}$$

Hier gehört der von $\log x$ freie Teil nach der vorangehenden Entwicklung und mit Rücksicht auf (4) zu einem Exponenten, der $\geq \varrho + 1$, und zwar, da $\varrho \equiv \varrho_{\gamma-1}$ eine negative ganze Zahl sein sollte, auch bei von Null verschiedenem Wert von c . Das Gleiche gilt von den Coefficienten von $\log x, \log^2 x, \dots, \log^{\gamma-2} x$. Nehmen wir sodann an, dass $\varrho < -1$ sei, so gehört der Coefficient von $\log^{\gamma-1} x$ genau zu $\varrho + 1$, die

Coefficienten der höheren Potenzen von $\log x$ aber zu Exponenten, die $> \varrho + 1$ sind. Mithin gehört unter dieser Voraussetzung der ganze Ausdruck (11) zu dem an γ^{ter} Stelle stehenden Exponenten $\varrho + 1$.

Ist dagegen $\varrho \equiv \varrho_{\gamma-1} \equiv -1$, so gehört der Coefficient von $\log^{\gamma-1} x$ zu $\varrho + 1 \equiv 0$, wenn $c_{-1}^{(\gamma-2)} \neq 0$, sonst zu einem Exponenten, der $> \varrho + 1$. Da aber alsdann $c_{-1}^{(\gamma-1)} \neq 0$ ist, so gehört der Coefficient von $\log^{\gamma} x$ genau zu $\varrho + 1$. Die Coefficienten aller folgenden Potenzen von $\log x$ gehören aber zu Exponenten, die $> \varrho + 1$ sind; denn von den in ihnen auftretenden Reihen χ ist dies gezeigt worden, wenn man wieder die Formeln (4) berücksichtigt; die Constanten

$$c_{-1}^{(\gamma)}, c_{-1}^{(\gamma+1)}, \dots, c_{-1}^{(\sigma)}$$

sind aber bei der jetzigen Annahme ($\varrho_{\gamma-1} = -1$), der zufolge die Reihen $\psi_{\gamma}, \psi_{\gamma+1}, \dots, \psi_{\sigma}$ überhaupt keine negativen Potenzen von x enthalten, sämtlich Null. Folglich gehört in diesem Falle der Ausdruck (11) zu dem an $(\gamma + 1)^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Exponenten $\varrho + 1$, womit nunmehr unser Satz ganz allgemein erwiesen ist.

Zu Kapitel X.

Wenn

$$y \equiv f(x, u)$$

eine Function der beiden von einander unabhängigen Variablen x und u ist, für welche die Identität

$$\frac{\partial^{\tau}}{\partial u^{\tau}} \left(\frac{\partial^{\varrho} y}{\partial x^{\varrho}} \right) \equiv \frac{\partial^{\varrho}}{\partial x^{\varrho}} \left(\frac{\partial^{\tau} y}{\partial u^{\tau}} \right)$$

besteht, so ist auch, falls u gleich einer differenzierbaren Function von x

$$u \equiv \varphi(x)$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial^{\tau}}{\partial u^{\tau}} \left(\frac{d^{\varrho} y}{dx^{\varrho}} \right) \equiv \frac{d^{\varrho}}{dx^{\varrho}} \left(\frac{\partial^{\tau} y}{\partial u^{\tau}} \right).$$

Beweis: Es genügt, den Beweis für $\varrho = \tau = 1$ zu führen, da sich alsdann der allgemeine Satz für beliebige Werte von ϱ und τ durch wiederholte Anwendung des bewiesenen Specialfalles ergibt.

Wir bezeichnen mit

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}$$

die partiellen, ohne Rücksicht darauf, dass u und x von einander abhängig sind, nach x und u genommenen Ableitungen der Function $y \equiv f(x, u)$. Dann ist

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \varphi'(x),$$

wenn

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$$

gesetzt wird. Andererseits ist

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \varphi'(x),$$

also

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \varphi'(x).$$

Da aber nach Voraussetzung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial x},$$

so folgt aus (1) und (3)

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind bei der Anwendung desselben im Texte (S. 146) erfüllt. Denn dort ist v_n eine Function der Gestalt

$$v_n = \psi_n + \psi_{n-1}u + \cdots + \psi_0 u^n,$$

wo

$$u = \log x$$

und die ψ in einem gewissen Gebiet convergente Reihen sind, in welchen die Exponenten der Potenzen von x sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden.

Zu Kapitel XI.

Beweis der S. 155 benutzten Determinantenformel.

Die Determinante

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} \delta_{11} - \gamma_{11}\omega & \dots & \delta_{1n} - \gamma_{1n}\omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} - \gamma_{n1}\omega & \dots & \delta_{nn} - \gamma_{nn}\omega \end{vmatrix}$$

(Art. 76 (13)) entsteht sowohl durch Composition der Zeilen von C mit den Zeilen von $A(\omega)$, als auch durch Composition der Columnen von

$B(\omega)$ mit den Columnen von C . Wir fassen zunächst die erstere Entstehungsweise in's Auge. Greifen wir dann eine beliebige Unter-determinante ν^{ter} Stufe von $D(\omega)$ heraus

$$d_{ik},$$

so wird diese gebildet, indem in $D(\omega)$ irgend welche ν Zeilen, etwa die Zeilen $i_1, i_2 \dots i_\nu$, und irgend welche ν Columnen, etwa die Columnen $k_1, k_2 \dots k_\nu$, gestrichen werden, wo sowohl die i wie die k ν verschiedene der Zahlen $1, 2, \dots, n$ sind. Dass eine solche bestimmte Combination von ν Zeilen ($i_1 i_2 \dots i_\nu$) und eine bestimmte Combination von ν Columnen ($k_1 k_2 \dots k_\nu$) gestrichen sind, soll eben bei der Bezeichnung d_{ik} der erste, bezw. zweite Index andeuten. Nach der jetzt für $D(\omega)$ zu Grunde gelegten Entstehungsweise kann man daher dieselbe Determinante d_{ik} auch aus zwei rechteckigen Systemen, deren erstes aus dem System der Elemente von C

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ . & \dots & . \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

durch Streichung der Zeilen $i_1 i_2 \dots i_\nu$, deren zweites aus dem System der Determinante $A(\omega)$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \omega, & \dots, & \alpha_{n1} \\ . & \dots & . \\ \alpha_{1n} & , \dots, & \alpha_{nn} - \omega \end{pmatrix}$$

durch Streichung der Zeilen $k_1 k_2 \dots k_\nu$ hervorgeht, erzeugen, indem die Zeilen des ersten mit den Zeilen des zweiten componiert werden. Nach dem Satz über die Determinante eines componierten Systems (Vergl. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det., 5. Aufl. § 6. 1. S. 48) ist demnach d_{ik} gleich der Summe der Produkte von je zwei Determinanten, die aus den beiden rechteckigen Systemen entstehen, wenn jedesmal in beiden dieselben ν Columnen gestrichen werden. Bei der von uns eingeführten Bezeichnung für die Unter-determinanten von C und $A(\omega)$ sind aber diese miteinander multiplicierten Determinanten

$$c_{i\lambda} \text{ und } a_{k\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \mu),$$

wo λ andeutet, dass eine bestimmte der $\binom{n}{\nu} \equiv \mu$ vorhandenen Combinationen von ν der n Columnen gestrichen ist. Es ist also nach dem citierten Determinantensatz

$$d_{ik} = c_{i1}a_{k1} + c_{i2}a_{k2} + \dots + c_{i\mu}a_{k\mu},$$

womit die eine der in Artikel 77 (S. 155) benutzten Formeln erwiesen ist.

Denkt man sich $D(\omega)$ auf die zweite Art erzeugt, so beweist man ganz ebenso die zweite Formel

$$d_{ik} = b_{1i}c_{1k} + b_{2i}c_{2k} + \dots + b_{\mu i}c_{\mu k}.$$

Zu Kapitel XII.

1) *Nachweis der S. 166 benutzten Identität*

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y_i}{\eta_1} \right) \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{\overline{y_i}}{\overline{\eta_1}} \right),$$

wo η_1 ein in einem Kreisring mit dem Mittelpunkt $x=0$ gültiges und in diesem Gebiet abgesehen von dem Faktor x^{α_1} eindeutiges Integral, y_i ein reguläres Integral ist, das für die Umgebung der in jenem Kreisring liegenden Stelle x_0 definiert ist.

Wir beweisen zunächst die Identität

$$(2) \quad \frac{d\overline{y_i}}{dx} \equiv \frac{d\overline{y_i}}{dx}.$$

Das Integral y_i hat als reguläres Integral bei $x = x_0$ die Gestalt

$$(3) \quad y_i \equiv c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Macht nun x einen Umlauf von x_0 aus um $x=0$, so hat nach demselben die aus y_i entstehende Function $\overline{y_i}$ abermals die Gestalt einer gewöhnlichen Potenzreihe von $x - x_0$

$$(4) \quad \overline{y_i} \equiv \overline{c_0} + \overline{c_1}(x - x_0) + \overline{c_2}(x - x_0)^2 + \dots,$$

d. h. bei dem Umlauf verwandelt sich

$$c_k \text{ in } \overline{c_k} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Aus (4) folgt

$$(5) \quad \frac{d\overline{y_i}}{dx} \equiv \overline{c_1} + 2\overline{c_2}(x - x_0) + \dots$$

Andererseits ist

$$(6) \quad \frac{dy_i}{dx} \equiv c_1 + 2c_2(x - x_0) + \dots$$

Da aber bei dem Umlauf die c in die überstrichenen \overline{c} übergehen, so ist

$$(7) \quad \frac{d\overline{y_i}}{dx} \equiv \overline{c_1} + 2\overline{c_2}(x - x_0) + \dots,$$

und aus der Uebereinstimmung der rechten Seiten von (5) und (7) folgt die zunächst zu beweisende Identität (2)

$$\frac{d\overline{y_i}}{dx} \equiv \frac{d\overline{y_i}}{dx}.$$

Nun ist (s. S. 166 Zeile 10)

$$(8) \quad \bar{y}_i = \beta_{i1} \eta_1 + \beta_{i2} y_2 + \cdots + \beta_{in} y_n,$$

also

$$(9) \quad y'_i = \beta_{i1} \eta'_1 + \beta_{i2} y'_2 + \cdots + \beta_{in} y'_n,$$

wo die Accente die Ableitungen nach x bedeuten; nach (2) ist folglich auch

$$(10) \quad y'_i = \beta_{i1} \eta'_1 + \beta_{i2} y'_2 + \cdots + \beta_{in} y'_n.$$

Das Integral η_1 hat die Umlaufsrelation

$$(11) \quad \bar{\eta}_1 = \omega_1 \eta_1,$$

wo

$$\omega_1 = e^{2r_1 \pi i}.$$

Da aber auch die Ableitung von η_1 wieder eine bis auf den Faktor x^{r_1} eindeutige Function ist, so ist

$$(12) \quad \frac{d\bar{\eta}_1}{dx} = \omega_1 \frac{d\eta_1}{dx}.$$

Nach (11) ist aber

$$(13) \quad \frac{d\eta_1}{dx} = \omega_1 \frac{d\eta_1}{dx},$$

mithin auch für dieses Integral

$$(14) \quad \frac{d\bar{\eta}_1}{dx} = \frac{d\bar{\eta}_1}{dx}.$$

Jetzt können wir die Identität (1) als richtig erweisen, indem wir deren beide Seiten bilden. Es ist

$$\left(\frac{y_i}{\eta_1}\right) = \frac{\bar{y}_i}{\bar{\eta}_1} = \frac{1}{\omega_1} (\beta_{i1} + \beta_{i2} \frac{y_2}{\eta_1} + \cdots + \beta_{in} \frac{y_n}{\eta_1})$$

und

$$(15) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y_i}{\eta_1}\right) = \frac{1}{\omega_1 \eta_1^2} [\beta_{i2} (\eta_1 y'_2 - y_2 \eta'_1) + \cdots + \beta_{in} (\eta_1 y'_n - y_n \eta'_1)].$$

Andererseits ist

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_i}{\eta_1}\right) = \frac{\eta_1 y'_i - y_i \eta'_1}{\eta_1^2}$$

und

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_i}{\eta_1}\right) = \frac{\bar{\eta}_1 \bar{y}'_i - \bar{y}_i \bar{\eta}'_1}{\bar{\eta}_1^2},$$

d. h. nach (8), (10), (11), (12)

$$(16) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y_i}{\eta_1}\right) =$$

$$\frac{1}{\omega_1 \eta_1^2} [\eta_1 (\beta_{i1} \eta'_1 + \beta_{i2} y'_2 + \cdots + \beta_{in} y'_n) - \eta'_1 (\beta_{i1} \eta_1 + \beta_{i2} y_2 + \cdots + \beta_{in} y_n)].$$

Die rechten Seiten von (15) und (16) stimmen überein; daraus folgt die zu beweisende Identität (1)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_i}{\eta_1} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\eta_i}{\eta_1} \right).$$

2) *Satz von Casorati*¹⁾: Wenn der λ -fache Lineartheiler $(\omega_1 - \omega)^{\lambda}$ der Determinante

$$A(\omega) = \begin{vmatrix} \omega_1 - \omega, & \dots, & 0, & \alpha_{v_0+1,1}, & \dots, & \alpha_{n1} \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0, & \dots, & \omega_1 - \omega, & \alpha_{v_0+1, v_0}, & \dots, & \alpha_{n, v_0} \\ 0, & \dots, & 0, & \alpha_{v_0+1, v_0+1} - \omega, & \dots, & \alpha_{n, v_0+1} \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0, & \dots, & 0, & \alpha_{v_0+1, n}, & \dots, & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

die v_0 Elementarteiler

$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \lambda_1}, (\omega_1 - \omega)^{\lambda_1 - \lambda_2}, \dots, (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{v_0-1} - \lambda_{v_0}}$$

derselben liefert, so liefert der $(\lambda - v_0)$ -fache Lineartheiler $(\omega_1 - \omega)^{\lambda - v_0}$ der Determinante

$$A'(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_{v_0+1, v_0+1} - \omega, & \dots, & \alpha_{n, v_0+1} \\ . & \dots & . \\ \alpha_{v_0+1, n}, & \dots, & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

die Elementarteiler

$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda - \lambda_1 - 1}, (\omega_1 - \omega)^{\lambda_1 - \lambda_2 - 1}, \dots, (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{v_0-1} - \lambda_{v_0} - 1}$$

von $A'(\omega)$, sodass die Anzahl der Elementarteiler von $A'(\omega)$ um die Anzahl der einfachen Elementarteiler von $A(\omega)$ hinter der Gesamtzahl von deren Elementarteilern zurückbleibt.

Wir beweisen zunächst die Reihe der Ungleichungen

$$(17) \quad \lambda > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{v_0-1},$$

um dieselben beim Beweis des Casorati'schen Satzes benutzen zu können. Zu dem Ende gehen wir von der allgemeineren Determinante

$$A = |\alpha_{ik} - \beta_{ik} \omega| \quad (\alpha, k = 1, 2, \dots, n)$$

aus, welche durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda}$ teilbar sei, während der grösste gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten erster Stufe von A $(\omega_1 - \omega)$ in der Potenz $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_1}$ enthält, derjenige aller Unterdeterminanten zweiter Stufe in der Potenz $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_2}$ u. s. w., der grösste gemeinsame Teiler

1) Vergl. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris, t. 92 (1881). S. 175 u. 238.

aller Unterdeterminanten ν_0^{ter} Stufe aber $\omega_1 - \omega$ gar nicht mehr enthält.

Bezeichnet man die Adjuncten der Elemente von A bzw. mit

$$A_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

so ist (s. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. 5. Aufl. § 3. 14. 15. S. 28, 29)

$$(18) \quad \frac{dA}{d\omega} \equiv - \sum_{(i, k)} \beta_{ik} A_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Da nun die linke Seite von (18) nur durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda-1}$ teilbar ist, kann auch der grösste gemeinsame Teiler aller A_{ik} $\omega_1 - \omega$ höchstens in dieser Potenz enthalten, d. h.

$$\lambda_1 \leq \lambda - 1.$$

Hiermit ist die erste der Ungleichungen (17) erwiesen, und ebenso ergibt sich die Richtigkeit der übrigen.

Um nun den Casorati'schen Satz selbst zu beweisen, haben wir die Elementarteiler von $A'(\omega)$ aufzusuchen. Zu dem Ende zeigen wir, dass der grösste gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten von $A'(\omega)$

erster Stufe durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_1 - \nu_0 + 1}$,

zweiter „ „ $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_2 - \nu_0 + 2}$,

u. s. w.,

überhaupt der grösste gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe von $A'(\omega)$ durch

$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu}$$

und keine höhere Potenz von $\omega_1 - \omega$ teilbar ist, wenn ν einen der Werte $\nu = 1, 2, \dots, \nu_1$ hat und ν_1 die Stufenzahl derjenigen Unterdeterminanten von $A'(\omega)$ bedeutet, welche zuerst nicht mehr sämtlich durch $\omega_1 - \omega$ teilbar sind, sodass $\lambda_{\nu_1} - \nu_0 + \nu_1 = 0$. Die Zahl ν_1 , und folglich auch ν , ist hiernach, da $A'(\omega)$ eine Determinante $(n - \nu_0)^{\text{ten}}$ Grades ist, stets $< n - \nu_0$, was für den folgenden Beweis von Wichtigkeit ist.

Wir zerlegen den Beweis der ausgesprochenen Behauptung in zwei Teile, indem wir nacheinander zeigen:

a) alle Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe von $A'(\omega)$ sind *höchstens* durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu}$ teilbar;

b) alle Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe von $A'(\omega)$ sind *mindestens* durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu}$ teilbar.

a) Sei P eine beliebige Unterdeterminante ν^{ter} Stufe von $A(\omega)$, sodass $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu}$ die höchste in *allen* P enthaltene Potenz von $\omega_1 - \omega$ ist. Eine solche Unterdeterminante P entsteht aus $A(\omega)$ durch Strei-

chung von ν Zeilen und ν Columnen; es bleiben also von den $n - \nu_0$ letzten Zeilen in $A(\omega)$ mindestens $n - \nu_0 - \nu$ — eine stets positive Anzahl — übrig. Die aus solchen $n - \nu_0 - \nu$ Zeilen gebildeten Unterdeterminanten $(n - \nu_0 - \nu)^{\text{ter}}$ Grades von P sind nun entweder identisch Null (sobald nämlich nicht die sämtlichen ν_0 ersten Columnen, die ja nur Nullen enthalten, in jenen Zeilen gestrichen sind), oder sie sind Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe von $A'(\omega)$. Bezeichnen wir dieselben im letzteren Fall mit

$$L, M, \dots, N$$

und bezw. mit

$$L_1, M_1, \dots, N_1$$

ihre Adjuncten in der Determinante P , so ist

$$(19) \quad P = LL_1 + MM_1 + \dots + NN_1.$$

Setzt man hier für P successive alle Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe von $A(\omega)$, so erhält man rechts für L, M, \dots, N successive alle Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe von $A'(\omega)$. Hieraus folgt zunächst, dass $\nu_1 \leq \nu_0$; denn wäre $\nu_1 > \nu_0$, so wären noch alle Unterdeterminanten ν_0^{ter} Stufe von $A'(\omega)$ und folglich nach (19) für $\nu = \nu_0$ auch alle Unterdeterminanten ν_0^{ter} Stufe von $A(\omega)$ durch $\omega_1 - \omega$ teilbar, was ausgeschlossen ist. Da aber ν die Werte $1, 2, \dots, \nu_1$ durchläuft, so ist stets $\nu_0 - \nu > 0$, was für das unmittelbar Folgende von Wichtigkeit ist.

Nach Definition der Determinanten L_1, M_1, \dots, N_1 sind nämlich mindestens $\nu_0 - \nu$ Zeilen und mindestens $\nu_0 - \nu$ Columnen derselben aus den ν_0 ersten Zeilen, bezw. ν_0 ersten Columnen von $A(\omega)$ entnommen. Enthält aber die Determinante L_1 z. B. irgend eine der ν_0 ersten Columnen von $A(\omega)$, während die gleichnamige Zeile von $A(\omega)$ fehlt, so ist $L_1 = 0$, andernfalls — wenn die gleichnamige Zeile nicht fehlt — kann dieses Reihenpaar gestrichen und statt dessen der Faktor $\omega_1 - \omega$ vor die ganze Determinante gesetzt werden. Wenn also eine der Determinanten L_1, M_1, \dots, N_1 zu jenen mindestens vorhandenen $\nu_0 - \nu$ Columnen, die aus den ν_0 ersten Columnen von $A(\omega)$ herrühren, nicht auch die bezw. gleichnamigen Zeilen aus $A(\omega)$ enthält, so ist sie Null, andernfalls mindestens durch $(\omega_1 - \omega)^{\nu_0 - \nu}$ teilbar. Wären also sämtliche Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe von $A'(\omega)$, d. h. sämtliche L, M, \dots, N in allen Gleichungen (19) durch eine höhere Potenz von $\omega_1 - \omega$ als $(\omega_1 - \omega)^{2\nu - \nu_0 + \nu}$ teilbar, so wären zufolge (19) sämtliche P durch eine höhere Potenz von $\omega_1 - \omega$ als $(\omega_1 - \omega)^4$ teilbar, was ausgeschlossen ist.

Wir haben somit die unter a) aufgestellte Behauptung erwiesen.

b) Um zu beweisen, dass *alle* Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe von $A'(\omega)$ auch *mindestens* durch $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu} - \nu_0 + \nu}$ teilbar sind, verfahren wir folgendermassen. Es giebt mindestens eine von Null verschiedene Unterdeterminante ν_0^{ter} Stufe von $A(\omega)$, die nicht mehr durch $\omega_1 - \omega$ teilbar ist; wir bezeichnen eine solche mit D . Sie kann aus $A(\omega)$ nur entstehen, wenn alle ν_0 ersten Columnen weggelassen, da sie sonst $\equiv 0$ oder durch $\omega_1 - \omega$ teilbar wäre. D ist also aus $n - \nu_0$ Zeilen der $n - \nu_0$ letzten Columnen von $A(\omega)$ gebildet. Die Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe von D , deren Zahl

$$\mu_0 \equiv \binom{n - \nu_0}{\nu}$$

ist, bezeichnen wir durch

$$d_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, \mu_0),$$

ihre Adjuncten in D bezw. durch

$$D_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, \mu_0).$$

Jede der Determinanten D_{ik} ist also eine Determinante ν^{ten} Grades, gebildet aus den Elementen gewisser (durch den Index i charakterisierten) ν Zeilen von $A(\omega)$ und gewisser (durch den Index k angedeuteten) ν der $n - \nu_0$ letzten Columnen von $A(\omega)$. Ferner bezeichnen wir die μ_0^2 Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe von $A'(\omega)$ (die unter a) mit L, M, \dots, N typisch bezeichnet waren) jetzt anschaulicher durch

$$a'_{hk} \quad (h, k = 1, 2, \dots, \mu_0),$$

wo die Indices h, k andeuten, dass bei der Bildung von a'_{hk} bestimmte ν Zeilen, bezw. bestimmte ν Columnen von $A'(\omega)$ oder also von den $n - \nu_0$ letzten Zeilen und Columnen von $A(\omega)$ gestrichen werden. Die Determinanten a'_{hk} mit bestimmtem Index k enthalten demnach gerade aus denjenigen Columnen von $A(\omega)$ keine Elemente, aus deren Elementen die D_{ik} mit demselben zweiten Index k gebildet sind.

Nun betrachten wir die Summen

$$(20) \quad \begin{cases} D_{11} a'_{h1} + \dots + D_{1\mu_0} a'_{h\mu_0} \equiv S_{h1} \\ \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ D_{\mu_0 1} a'_{h1} + \dots + D_{\mu_0 \mu_0} a'_{h\mu_0} \equiv S_{h\mu_0} \end{cases} \quad (h = 1, 2, \dots, \mu_0).$$

Nach der Definition der D_{ik} ist jede dieser Summen S_{hl} ($h, l = 1, 2, \dots, \mu_0$) wieder als Determinante $(n - \nu_0)^{\text{ten}}$ Grades darstellbar, indem man einfach die $n - \nu_0 - \nu$ zur Bildung von

$$a'_{h1} a'_{h2} \dots a'_{h\mu_0}$$

und die ν zur Bildung von

$$D_{i1} D_{i2} \dots D_{i\mu_0}$$

verwendeten Zeilen, deren jede $n - \nu_0$ Elemente enthält, untereinander setzt und die Determinante dieses quadratischen Systems von $(n - \nu_0)^2$ Elementen nimmt.

Die Determinante S_{hi} ist daher identisch Null, wenn die Zeilen der a'_h zum Teil mit denen der D_i übereinstimmen (s. Baltzer, Th. u. Anw. d. Det. 5. Aufl. § 4. 1. S. 32), und sie ist — höchstens abgesehen vom Vorzeichen — gleich $A'(\omega)$, wenn die Zeilen der a'_h und D_i sich gerade zu denen von $A'(\omega)$ ergänzen. Die dritte, allein noch übrige Möglichkeit ist die, dass die ν Zeilen der D_i , ohne in irgend einer mit einer Zeile der a'_h übereinzustimmen, zum Teil oder auch sämtlich den ν_0 ersten Zeilen von $A(\omega)$ entstammen. Rändert man in diesem Falle die Determinante durch die Elemente von $\nu_0 - \nu$ anderen der ν_0 ersten Zeilen und der gleichnamigen Columnen von $A(\omega)$, so entsteht also eine Unterdeterminante ν^{ter} Stufe P von $A(\omega)$, und es ist

$$(21) \quad P \equiv (\omega_1 - \omega)^{\nu_0 - \nu} S_{hi}.$$

Da aber sämtliche P mindestens durch $(\omega_1 - \omega)^{2\nu}$ teilbar sind, so ist S_{hi} in dem betrachteten Falle nach (21) durch $(\omega_1 - \omega)^{2\nu - \nu_0 + \nu}$ teilbar. In dem ersten der drei Fälle war $S_{hi} \equiv 0$, im zweiten ist $S_{hi} \equiv \pm A'(\omega)$ durch $(\omega_1 - \omega)^{2 - \nu_0}$, also den Ungleichungen (17) zufolge ebenfalls mindestens durch $(\omega_1 - \omega)^{2\nu - \nu_0 + \nu}$ teilbar. Die sämtlichen Grössen S_{hi} sind also entweder Null oder mindestens durch $(\omega_1 - \omega)^{2\nu - \nu_0 + \nu}$ teilbar.

Fasst man nun in den Gleichungssystemen (20) die a'_{hk} als Unbekannte auf, so ist die Determinante jedes dieser Gleichungssysteme (s. Baltzer, a. a. O. § 7. 6. S. 68)

$$|D_{ik}| \equiv D^{\binom{n - \nu_0 - 1}{\nu - 1}}$$

und daher nicht durch $\omega_1 - \omega$ teilbar. Da aber bei der Auflösung des Gleichungssystems (20) jedes a'_{hk} , multipliciert mit $|D_{ik}|$, eine lineare homogene Function der S_{hi} wird, so folgt aus dem obigen Ergebnis für die letzteren, dass auch sämtliche a'_{hk} , d. h. sämtliche Unterdeterminanten ν^{ter} Stufe von $A'(\omega)$ mindestens durch die Potenz $(\omega_1 - \omega)^{2\nu - \nu_0 + \nu}$ von $(\omega_1 - \omega)$ teilbar sind.

Hiermit ist auch die unter b) aufgestellte Behauptung erwiesen, und wir haben somit bisher gezeigt:

Sämtliche *Unterdeterminanten* ν^{ter} Stufe ($\nu = 1, 2, \dots, \nu_1$) von $A'(\omega)$ sind durch die Potenz

$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda_\nu - \nu_0 + \nu},$$

aber nicht sämtliche durch eine höhere Potenz von $\omega_1 - \omega$ teilbar.

Mit ν_1 bezeichnen wir die Stufenzahl derjenigen *Unterdeterminanten* von $A'(\omega)$, die zuerst nicht mehr sämtlich durch $\omega_1 - \omega$ teilbar sind. Also folgt aus dem soeben Bewiesenen für $\nu = \nu_1$

$$\lambda_{\nu_1} - \nu_0 + \nu_1 = 0$$

oder

$$(22) \quad \lambda_{\nu_1} = \nu_0 - \nu_1.$$

Die Zerlegung des Teilers $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_1} - \nu_0}$ von $A'(\omega)$ in *Elementarteiler* lautet daher

$$(23) \quad (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_1} - \nu_0} \equiv (\omega_1 - \omega)^{\lambda_1 - \lambda_1 - 1} \dots (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_1-2} - \lambda_{\nu_1-1} - 1} \cdot (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_1-1} - \nu_0 + \nu_1 - 1},$$

während diejenige des Teilers $(\omega_1 - \omega)^{\lambda_1}$ von $A(\omega)$

$$(24) \quad (\omega_1 - \omega)^{\lambda_1} \equiv (\omega_1 - \omega)^{\lambda_1 - \lambda_1} \dots (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_1-2} - \lambda_{\nu_1-1}} \cdot (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_1-1} - \lambda_{\nu_1}} \dots (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_0-1} - \lambda_{\nu_0}}$$

war. Mit Rücksicht auf Gleichung (22) ist also der *Casorati'sche Satz* in Bezug auf die ν_1 ersten *Elementarteiler* von $A(\omega)$ und, wenn $\nu_1 = \nu_0$, schon ganz allgemein bewiesen. Ist dagegen $\nu_1 < \nu_0$, so stehen den *Elementarteilern*

$$(\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_1} - \lambda_{\nu_1+1}}, \dots, (\omega_1 - \omega)^{\lambda_{\nu_0-1} - \lambda_{\nu_0}}$$

von $A(\omega)$ gar keine *Elementarteiler* von $A'(\omega)$ oder — wie wir dafür sagen können — solche vom nullten Grad gegenüber. Der Satz wird also auch für die letzteren *Elementarteiler* bewiesen sein, wenn gezeigt ist, dass der Grad eines jeden derselben gleich der Einheit ist, d. h. dass dies lauter einfache *Elementarteiler* von $A(\omega)$ sind. Multipliziert man zu dem Ende (23) mit $(\omega_1 - \omega)^{\nu_0}$, so muss die Summe der Exponenten von $\omega_1 - \omega$ auf der rechten Seite von (23) und (24) denselben Wert haben. Dies ergibt aber die Gleichung

$$(25) \quad (\lambda_{\nu_1} - \lambda_{\nu_1+1}) + (\lambda_{\nu_1+1} - \lambda_{\nu_1+2}) + \dots + \lambda_{\nu_0-1} \equiv \nu_0 - \nu_1,$$

wo links nach (17) die Summe von $\nu_0 - \nu_1$ positiven ganzen Zahlen steht. Diese hat den Wert $\nu_0 - \nu_1$; folglich ist

$$\lambda_{\nu_1} - \lambda_{\nu_1+1} = \lambda_{\nu_1+1} - \lambda_{\nu_1+2} = \dots = \lambda_{\nu_0-1} = 1.$$

Hiermit ist der Casorati'sche Satz ganz allgemein bewiesen.

Da für die Determinante $A'(\omega)$ die den Ungleichungen (17) analogen Ungleichungen gelten, folgt noch, dass *nur* die $\nu_0 \cdots \nu_1$ letzten Elementarteiler von $A(\omega)$ *einfache*, alle vorangehenden aber höheren als ersten Grades sind. Wendet man daher den Casorati'schen Satz dann auf $A'(\omega)$ abermals an, bzw. auf eine Determinante, die in ihren Elementarteilern mit $A'(\omega)$ übereinstimmt, aber schon die Gestalt von $A(\omega)$ hat, u. s. w., so ergibt sich — nebenbei bemerkt — gleichzeitig noch der Satz:

Die Grade der Elementarteiler einer Determinante $A(\omega)$ stehen in der Beziehung

$$\lambda - \lambda_1 > \lambda_1 - \lambda_2 > \cdots > \lambda_{\nu_0-1}.$$

Register der angewandten Bezeichnungen.

(Die beigefügten Seitenzahlen beziehen sich auf die Stelle, wo der betreffende Ausdruck eingeführt wird.)

Anfangswerte eines Integrals 59.
 Allgemeines Integral 49.
 Allgemeinstes Integral einer Gruppe 127.
 Allgemeinstes zu einer an bestimmter Stelle stehenden Zahl gehöriges Integral einer Gruppe 94.
 Allgemeinstes Integral bestimmter Stufe in einer Gruppe 105.
 Analytische Fortsetzung 71.

Bestimmtes Verhalten einer Function 10. 90. S. auch „Stelle“.

Casorati'scher Satz 173.
 Charakteristische Function, 11. Anm.
 Charakteristische Gleichung 63.
 Charakteristischer Index 13. Anm.
 Coefficienten der Differentialgleichung 1.
 Composition von Substitutionen 78.

Definiente mehrerer Functionen 47.
 Determinante eines Fundamentalsystems 48.
 Determinierende Fundamentalgleichung 13. Anm.

Determinierende Gleichung, Function 13; bei $x = \infty$ 207.

Differentialgleichung; gewöhnliche, algebraische, lineare, lineare homogene 1.

Einfach zusammenhängendes Gebiet 74.
 Einfache singuläre Punkte 226. Anm.
 Elementarteiler 156.
 Elemente der Integralfunction 71.
 Elemente eines Fundamentalsystems 48.

Fuchs'sche Klasse von Differentialgleichungen 212.
 Fuchs'sche Methode zur Gewinnung linear unabhängiger Integrale 53.
 Fundamentalgleichung 152; bei $x = \infty$ 203.
 Fundamentalschleife 80.
 Fundamentalsubstitution 80.
 Fundamentalsystem von Integralen 48.

Gauss'sche Differentialgleichung 18.
 Gauss'sche F -Reihe 42.
 Gebiet der Differentialgleichung 2.
 Gebilde, monogenes — der Integralfunction 71.
 Gehören einer Function zu einer Zahl 10. 90.

Gehören einer Function zu einer an bestimmter Stelle stehenden Zahl 90.
 Grad einer algebraischen Differentialgleichung 1.
 Gruppe der Differentialgleichung 81; endliche, unendliche G . 82.

Gruppeneigenschaft 81.
 Gruppe von Integralen 88, Zugehörigkeit eines Integrals zu einer G . 93.
 Gruppe von Wurzeln der determinierenden Gleichung 21.

Hypergeometrische Reihe 42.

Integral der Differentialgleichung 5; allgemeines, partikuläres I. 49; reguläres I. 59. 90. Anm.

Integration der Differentialgleichung 5.
 Irreduktibilität von Differentialgleichungen 191. (s. auch d. Anm.)

Kreisfortsetzung 71.

Linear unabhängige Functionen 46.

Linearteiler der Fundamentalgleichung 154.

Lösung, s. Integral.

Methode der unbestimmten Coefficienten 9. "

Normalform der Differentialgleichung 9. 10; bei $x = \infty$ 206.

Ordnung einer Differentialgleichung 1.

Parameter der Differentialgleichung 1.
Primfaktoren, symbolische — eines Differentialausdrucks 190.

Quadratur 6.

Reciproke Radian; Transformation mittelst r. R. 198.

Recursionsformel 12; bei $x = \infty$ 207.

Recursionsformel für logarithmenbehaftete Integrale 116.

Reducierte Gleichung 56.

Reduktibilität von Differentialgleichungen 191. (s. auch d. Anm.)

Regulär; s. Stello, Integral.

Singulär; s. Stello.

Stelle, reguläre, singuläre 3.

Stelle, ausserwesentlich, wesentlich, singuläre 4. 204.

Stelle, scheinbar, wirklich singulär

Stelle der Bestimmtheit, der Bestimmtheit 14. im Unendlichen

Stelle $x = \infty$ 199.

Stufe eines Integrals 105.

Stufe einer Unterdeterminante

Stufe einer Untergruppe von Integralen 135.

Substitution; Erleiden einer Substitution, tische Subst. 79.

Umgebung einer Stelle 4; von 201.

Umlauf der unabhängigen Variablen

Umlaufsrelation eines Integrals

Unbestimmtes Verhalten einer Function 163 S. auch „Stello“.

Unendlich ferner Punkt 199.

Untergruppe von Integralen 135.

Variable; unabhängige, abhängige

Verzweigung der Integrale 94.

Verzweigungsschnitt 74.

Zerlegung eines Differentialausdrucks 182.

Zerlegung der Recursionsformel 13.

Zusammensetzung von Differentialausdrücken 182.

Zweige der Integralfunction 75.

